

EGEM

électronique – génie électrique – microsystèmes

# Modélisation des machines électriques en vue de leur commande

*concepts généraux*

*sous la direction de*
*Jean-Paul Louis*

Hermes

*Lavoisier*

LAVOISIER
11, rue Lavoisier
75008 Paris

Serveur web : www.hermes-science.com

ISBN 2-7462-0916-0

# Modélisation des machines électriques en vue de leur commande

*concepts généraux*

*sous la direction de*
Jean-Paul Louis






# Modélisation des machines électriques en vue de leur commande

*concepts généraux*

*sous la direction de*
Jean-Paul Louis



*Il a été tiré de cet ouvrage*
*25 exemplaires hors commerce réservés*
*aux membres du comité scientifique,*
*aux auteurs et à l'éditeur*
*numérotés de 1 à 25*

# Modélisation des machines électriques en vue de leur commande

*sous la direction de Jean-Paul Louis*

fait partie de la série GÉNIE ÉLECTRIQUE

dirigée par René Le Dœuff et Jean-Claude Sabonnadière

## TRAITÉ EGEM

## ELECTRONIQUE – GÉNIE ELECTRIQUE – MICROSYSTÈMES

Le traité Electronique, Génie Electrique, Microsystèmes répond au besoin de disposer d'un ensemble de connaissances, méthodes et outils nécessaires à la maîtrise de la conception, de la fabrication et de l'utilisation des composants, circuits et systèmes utilisant l'électricité, l'optique et l'électronique comme support.

Conçu et organisé dans un souci de relier étroitement les fondements physiques et les méthodes théoriques au caractère industriel des disciplines traitées, ce traité constitue un état de l'art structuré autour des quatre grands domaines suivants :

Electronique et micro-électronique

Optoélectronique

Génie électrique

Microsystèmes

Chaque ouvrage développe aussi bien les aspects fondamentaux qu'expérimentaux du domaine qu'il étudie. Une classification des différents articles contenus dans chacun, une bibliographie et un index détaillé orientent le lecteur vers ses points d'intérêt immédiats : celui-ci dispose ainsi d'un guide pour ses réflexions ou pour ses choix.

Les savoirs, théories et méthodes rassemblés dans chaque ouvrage ont été choisis pour leur pertinence dans l'avancée des connaissances ou pour la qualité des résultats obtenus.

# Liste des auteurs

Mohamed Fouad BENKHORIS
IREENA
École Polytechnique de l'Université de Nantes
Saint Nazaire

Yvan BONNASSIEUX
LPICM
École Polytechnique
Palaiseau

Manuel da SILVA GARRIDO
Université Technique de Lisbonne
Portugal

Gilles FELD
Département EEA
ENS de Cachan

Edouard LAROCHE
LSIIT
Université Louis Pasteur
Strasbourg

Jean-Paul LOUIS
SATIE
ENS de Cachan

Ernest MATAGNE
LEI
Université Catholique de Louvain
Louvain la Neuve
Belgique

Eric MONMASSON
SATIE
Université de Cergy-Pontoise

Sandrine MOREAU
SATIE
Université de Cergy-Pontoise

Eric SEMAIL
L2EP
ENSAM
Lille

# Table des matières

Introduction

# Les modèles des machines électriques en vue de leur commande : les concepts généraux

Les *systèmes électriques* occupent désormais un vaste espace de la vie sociale, tant dans la vie professionnelle et industrielle, que dans la vie quotidienne et familiale. Les *actionneurs* électriques ont trouvé leurs premières places dans l'industrie : il fallait que des *machines travaillent* vite et bien. Si la première révolution industrielle a utilisé des machines hydrauliques et thermiques, la modernisation technologique s'est faite sous le signe de l'*électrification*. Les actionneurs électriques avaient un bon rendement ; ils faisaient moins de bruit, et surtout, ils pouvaient obéir avec rapidité et souplesse aux ordres venus des *systèmes intelligents* nés avec les premiers automates mécaniques, puis électromécaniques, puis électroniques, enfin informatiques. On a logiquement vu apparaître ces actionneurs de façon massive dans les *transports guidés*, trains et métros, et nos modernes TGV ont en quelques années présenté un raccourci saisissant de l'histoire des actionneurs électriques : la première génération de ces trains à grande vitesse a utilisé des moteurs à courant continu, la deuxième a eu recours à des moteurs synchrones autopilotés associés à des convertisseurs à thyristors, la troisième s'est emparé des moteurs asynchrones à contrôle vectoriel associé à des onduleurs à GTO.

On pourrait faire le même historique à propos des moteurs utilisés pour *la commande d'axe* dans l'industrie : les machines-outils, les machines spéciales, les robots, après avoir utilisé des moteurs hydrauliques, puissants mais malhabiles, ont

---

Introduction rédigée par Jean-Paul LOUIS.

utilisé eux aussi, et par ordre d'apparition, des moteurs à courant continu, puis des moteurs synchrones, enfin des moteurs asynchrones. C'est que ces machines pouvaient être pilotées avec beaucoup de finesse et permettaient aussi bien d'effectuer des travaux exigeant des puissances énormes, comme en sidérurgie, que des travaux exigeant délicatesse et dextérité, comme en robotique.

Ce panorama est effectué à grands pas et ignore, par exemple, d'autres branches qui relèvent plutôt des *services*, comme l'usage de petits moteurs pas à pas dans les programmateurs de dispositifs électroménagers. C'est que les moteurs électriques ont pénétré tous les domaines possibles, sans s'imposer totalement cependant. Nous savons que la voiture tout électrique n'existe encore que de façon bien marginale, à cause des problèmes posés par le stockage de l'énergie électrique. Mais l'aventure la plus excitante que nous vivons en ce début du troisième millénaire concerne la montée de l'électrification dans les moyens de transport : dans les voitures automobiles, qui contiennent des dizaines de (petits) moteurs, dans les navires, dans les avions. On conçoit tous les jours des moteurs pour de nouvelles applications, et tous ces moteurs *doivent être commandés*.

D'autres traités EGEM s'attacheront à décrire les outils matériels qui ont permis aux machines de pouvoir être commandées. Citons rapidement quelques grands domaines : *l'instrumentation*, *l'électronique de puissance* et *la micro-électronique*. En électronique de puissance, les deux grands premiers composants à semi-conducteurs (après les premiers composants à tubes, aujourd'hui bien oubliés, comme les redresseurs à vapeur de mercure), les diodes et les thyristors, ont permis de concevoir des convertisseurs qui ont autorisés d'abord, l'alimentation des moteurs à courant continu avec des tensions variables, puis des moteurs synchrones, *autopilotés*, avec des courants à fréquences également variables, synchronisés avec la position du rotor des moteurs. Il fallait donc, également, des *capteurs* et des outils de *traitement de signal* associés. La nouvelle grande étape a été rendue possible par les nouveaux composants de puissance : les transistors avec toutes ses déclinaisons (IGBT, MOS, GTO). On a pu alors à la fois associer des puissances de plus en plus élevées, avec des fréquences également de plus en plus élevées. On a eu la possibilité d'alimenter les machines à courant alternatif avec des onduleurs à grande souplesse d'utilisation et on a pu, effectivement, implanter les nouvelles stratégies de *contrôle vectoriel* ; cette stratégie est issue, en fait, de la commande des machines synchrones, mais cette fois-ci, il fallait l'appliquer aux si exigeants moteurs asynchrones. A cette étape, il fallait, en plus, disposer d'outils de calculs en temps réel, et si l'on se souvient avec émotion des services rendus par l'*électronique analogique*, les commandes modernes n'ont réellement pu s'imposer que lorsque l'on a disposé de la puissance de calculs en temps réel des microprocesseurs et des processeurs de traitement de signaux (DSP). On pouvait enfin concevoir des *algorithmes de commande* complexe, *implantable*s, basés sur une connaissance fine des *modèles* des machines électriques.

Avec *le concept de modèle*, on arrive au cœur du projet de cet ouvrage. Ce terme recouvre en pratique des démarches très générales. Pendant longtemps, la communauté du génie électrique-électrotechnique a particularisé ce terme pour la modélisation des systèmes électromagnétiques en vue de la réalisation de logiciels informatiques incluant des algorithmes par des éléments finis. Or, la modélisation est une activité scientifique qui est à la fois très générale, mais qui a des buts à chaque fois très particuliers. Enumérons quelques exemples. Ainsi, lorsque l'on modélise un système *en vue de son diagnostic*, le modélisateur va souvent s'intéresser à des comportements défectueux qui peuvent être permanents, mais qui sont souvent fugitifs. Par contre, lorsque l'on modélise *en vue de l'optimisation* (cas habituel des concepteurs de composants ou d'objets), on s'intéresse plutôt aux meilleurs fonctionnements que l'on veut rendre pérennes. Les concepteurs d'algorithmes de contrôle vont tout naturellement s'intéresser à des modélisations en régime transitoire *en vue de la commande*. Les performances des systèmes automatisés, qui ont tellement permis l'augmentation de la productivité industrielle ou l'amélioration de la vie quotidienne, sont largement basées sur la *connaissance* que l'on a de ces dispositifs. Cette connaissance est matérialisée par des modèles. Ce sont eux qui font l'objet du présent ouvrage.

Toute modélisation relève d'un *choix stratégique* de la part du modélisateur. On peut rêver à l'utopie du modèle parfait qui contiendrait toutes les informations possibles sur un objet, un composant, un dispositif, un système. Ce modèle, qui permettrait tout à la fois la conception de l'objet, sa fabrication, son optimisation, sa commande et son diagnostic, serait un modèle d'une complexité effarante, et son utilisation pratique serait en fait impossible. La *loi d'économie* s'impose. Un modèle ne doit guère contenir que les informations qui sont pertinentes et qui seront réellement utilisées par le concepteur qui utilisera le modèle. Cette remarque est fondamentale lorsque l'on s'attaque à une modélisation. Quels sont les phénomènes qu'il faut introduire dans son modèle ? Le modélisateur doit donc être un *expert* qui doit mettre son expertise au service d'une stratégie de choix.

Chaque champ scientifique a ses spécificités. Le champ de la commande des systèmes électriques est au carrefour de plusieurs spécialités. Si l'on considère les composants utilisés à côté des machines électriques, nous avons vu que la commande des machines a bénéficié des apports de l'électronique de puissance et de la micro-électronique. Ces deux spécialités font l'objet d'autres traités EGEM, et nous ne ferons ici ou là que quelques brèves incursions dans ces domaines.

Sur le plan des méthodes, et là nous nous rapprochons du programme de ce livre, la commande de machines électriques peut être considérée comme se situant à l'intersection de deux disciplines : *l'électrotechnique*, qui fournit le champ applicatif et les objets techniques considérés, et *l'automatique*, qui fournit des méthodes générales pour concevoir des algorithmes de commande. Disons le autrement pour la

*modélisation en vue de la commande* : l'électrotechnique fournira au modélisateur les *lois physiques* issues des lois des circuits électriques, des circuits magnétiques et de la conversion d'énergie, qui seront à la base de ses modèles ; l'automatique fournira les *structures mathématiques*, fonctions de transfert, équations d'état, qui seront à la base des méthodes de conception des algorithmes de commande.

Des choix stratégiques ont orienté la communauté des ingénieurs et des scientifiques. De l'électrotechnique, il fallait retenir un certain nombre de lois physiques, mais il fallait également choisir le niveau de finesse, pour obtenir le « bon modèle » : *assez précis pour rendre les services que l'on attend, et assez simple pour être utilisable*. On se doute que sur ce point, l'expertise du modélisateur est essentielle. Il devra savoir exactement quel est le but recherché, de façon à définir les critères auxquels ses modèles devront obéir. La *précision* des modèles est souvent une appréciation subjective et en fonction des applications, les *performances* exigées seront très disparates : la précision de la rotation de la commande d'axe d'une machine-outil est évidemment bien supérieure à la précision demandée pour la rotation d'un ventilateur de refroidissement. Tous les aspects devront être pris en compte, depuis la durée de l'étude, jusqu'au coût des composants qui seront utilisés. L'aspect social est donc un élément important, élément que la science a bien du mal à prendre en compte de manière formalisée et rigoureuse. L'ambition de cet ouvrage est de présenter un panorama des modèles utilisés pour la commande classique, et différentes approches donneront aux lecteurs les spécificités à prendre en compte lors d'une modélisation spécifique.

Cet ouvrage comprend deux volumes. Le premier, *Modélisation des machines électriques en vue de leur commande. Concepts généraux*, s'intéresse aux concepts généraux de la modélisation en vue de la commande. Le deuxième, *Modèles pour la commande des actionneurs électriques*, s'attache à des modélisations plus spécifiques. Nous présentons ici la composition du premier volume.

Les deux premiers chapitres ont pour but de montrer la largeur du spectre des modèles auxquels peuvent avoir recours les concepteurs de commande. Le premier chapitre, « Conversion électromécanique d'énergie : du phénomène physique à la modélisation dynamique » par Ernest Matagne et Manuel da Silva Garrido, s'intéresse aux concepts fondamentaux de la physique de la conversion d'énergie. Il présente les phénomènes physiques avec l'aide du formalisme lagrangien, à partir de résultats historiques dus à Maxwell et Poincaré dans un *contexte local*, qui permet de présenter les circuits électriques *filiformes* et les circuits *linéiques*, ce qui permet de donner une modélisation générale, applicable aussi bien aux machines à courant alternatif qu'aux machines présentant des *contacts glissants* comme les machines à courant continu. Cette approche introduit l'important concept qu'est la *co-énergie*. Cette approche justifie l'existence de *modèles dynamiques* et la possibilité de *représentations matricielles* lorsque l'on se situe dans certaines limites de précision.

L'*hypothèse de linéarité*, au sens de la non-saturation des matériaux magnétiques, est tout particulièrement discutée. L'autre extrémité de l'éventail de la modélisation est présentée par le second chapitre, « Modèles dynamiques des systèmes en génie électrique », par Yvan Bonnassieux, Edouard Laroche, Mohamed Fouad Benkhoris et Jean-Paul Louis, qui donne un panorama de modèles plus proches des méthodes de l'automatique. On y présente des exemples de *modèles de synthèse* qui sont basés sur la notion de *modèles directs* et de *modèles inverses* et qui débouchent, sinon exactement sur des algorithmes de commande, du moins sur une *structure théorique de commande*. Les algorithmes de commande proprement dits offrent un large choix aux concepteurs de commande : régulateurs PI industriels, commande en fourchette ou en mode glissant, commandes optimales, commandes robustes, etc., le choix est infini. Les modèles de synthèse sont fatalement *assez idéalisés* (qualificatif subjectif qui dépend fortement de l'expertise du modélisateur). On distinguera ce type de modélisation des *modèles d'analyse* qui peuvent être plus précis, donc plus lourds, et qui servent à *juger* des performances théoriques des modèles idéalisés utilisés pour la synthèse. Un bon exemple de ce point de vue est donné par la *valeur singulière structurée*, introduite par la communauté automatique qui se préoccupe de la *robustesse* de ses algorithmes de commande lorsque ses modèles sont *incertains* ou *imprécis*. La connaissance que l'électrotechnicien possède sur les modèles physiques des machines est évidemment un précieux atout pour introduire dans ces modèles des *incertitudes réalistes*, ni trop optimistes – qui conduisent à de mauvaises commandes, par exemple peu stables –, ni trop pessimistes – ce qui conduit à des commandes peu performantes. Encore plus précis sont les *modèles de simulation* qui cherchent à introduire un maximum de connaissances physiques dans la modélisation. Celle-ci peut donc être lourde, puisque les simulations n'ont pas pour but d'effectuer la synthèse de commandes, mais de *vérifier*, par la simulation d'essais types (là aussi, l'expertise du concepteur est un guide nécessaire), que les commandes synthétisées à l'aide des outils précédents, ont bien les performances exigées par le cahier des charges (rapidité, stabilité, robustesse). L'exemple traité concerne *l'association convertisseur-machine* et touche donc à l'électronique de puissance. En effet, les modèles de synthèse et d'analyse idéalisent souvent le fonctionnement du convertisseur statique, trop complexe. La simulation de tels ensembles posent des problèmes très spécifiques, et difficiles à traiter, qui exigent souvent le recours à des logiciels spécialisés.

Les trois autres chapitres de ce premier volume ont pour ambition de détailler les outils classiquement utilisés pour *modéliser en régime dynamique les actionneurs à courant alternatif*, c'est-à-dire les machines synchrones et asynchrones qui détrônent depuis quelques lustres les machines à courant continu : celles-ci ont rendu de grands services. Bonne dynamique, facilité de la commande, elles avaient toutes les qualités pour aider au démarrage de l'industrialisation automatisée moderne. Mais ces qualités étaient liées à la présence du *collecteur mécanique*, dispositif génial, mais fragile, qui exige de la surveillance et de l'entretien, et qui est interdit

dans certains environnements sensibles (humidité, poussières, gaz inflammables). *L'autopilotage* réalisé par l'ensemble collecteur-balais est avantageusement réalisé sur les machines à courant alternatif par un ensemble constitué d'un capteur de position, d'un convertisseur statique et d'une commande adéquate. Ce *collecteur électronique* à l'avantage de la robustesse, de ne pas réclamer de surveillance et de ne pas créer de dangereuses étincelles dans des environnement sensibles. Mais le collecteur électronique avait l'inconvénient d'exiger une très bonne électronique de puissance et d'importants moyens de calculs en temps réel. Ces conditions se sont réalisées tout au long des années 1980. Cela a permis une extraordinaire croissance de l'usage de ces actionneurs dans le monde moderne. Leur modélisation est donc une nécessité absolue.

Les modélisations présentées dans cet ouvrage sont considérées comme classiques, mais elles ont l'ambition d'ouvrir vers des modélisations moins classiques ; par ailleurs, ce sont elles qui sont à la base de la grande majorité des commandes modernes de machines. Cela signifie que l'on présente en priorité les hypothèses physiques qui sont à la base des équations utilisées par toute la communauté des ingénieurs et des chercheurs. C'est le rôle du troisième chapitre, « Modélisation physique des machines à courant alternatif », par Jean-Paul Louis, Gilles Feld et Sandrine Moreau, qui a une double ambition : présenter physiquement les machines à courants alternatifs et leurs équations physiques, mais aussi de préciser les hypothèses qui sont adoptées pour leur écriture. Celles-ci peuvent être brièvement résumées en quelques mots : *linéarité*, *premier harmonique* et *symétrie*. Le modélisateur doit savoir ce que signifient ces hypothèses pour connaître le degré de précision, ou d'imprécision, qu'il introduit dans ses modèles. Un « commandeur de machines » doit avoir quelques notions sur la physique des objets qu'il commande. Il doit savoir que des phénomènes physiques sont habituellement négligés par les modèles classiques : *l'hypothèse de linéarité* signifie, principalement, que l'on néglige la saturation des matériaux magnétiques, mais aussi l'effet de peau, les pertes ferromagnétiques (et tout ce qui pourrait trop compliquer le modèle : on fait donc, en fait, toutes les hypothèses *ad hoc* pour rester dans un cadre considéré comme simple) ; *l'hypothèse du premier harmonique* signifie que l'on suppose que les champs dans l'entrefer ont une *distribution sinusoïdale* et que l'on néglige donc les harmoniques d'espace et les effets des encoches ; la *symétrie* signifie que toutes les phases d'une armature (stator, rotor) sont identiques et simplement décalées dans l'espace et que l'on néglige les défauts qui pourraient apparaître lors de la construction ou lors d'un accident. Le modélisateur doit savoir comment ces modèles sont établis s'il veut comprendre ce qu'apportent les modèles « non classiques ». Ces derniers sont fatalement difficiles à classifier puisqu'ils dépendent de phénomènes, plus ou moins difficiles à introduire, que le modélisateur, guidé par son expertise, a décidé de prendre en compte pour améliorer la précision de ses modèles et, donc, les performances de ses algorithmes de commande. Le deuxième volume, *Modèles pour la commande des actionneurs électriques*, présentera deux

exemples d'extension de ce type de modélisation à des cas non classiques : au cas des machines synchrones à distribution de champ non sinusoïdales (chapitre 3, second volume), puis au cas des machines asynchrones en régime saturé (chapitre 7, second volume). D'autres extensions mériteraient d'être considérées : machines dissymétriques à cause de défauts (problème de diagnostic), effet de peau pour l'étude des effets des fréquences d'alimentation élevées (par exemple, celles qui sont dues au découpage MLI des convertisseurs), etc.

Le troisième chapitre présente donc les outils physiques qui permettent d'établir les équations classiques des machines à courant alternatif : la force magnétomotrice, la perméance superficielle, par exemple. Concrètement, on peut estimer que l'on a modélisé une machine électrique lorsque l'on a déterminé *la loi qui relie les flux dans les enroulements des phases avec les courants*. Avec les hypothèses classiques, ces lois sont *linéaires* et ce chapitre donne les expressions des *inductances propres et mutuelles*. De cette connaissance, on peut déduire aisément *les expressions des lois électriques de la machine ainsi que l'expression de son couple électromagnétique*, ce qui répond au problème posé. Cette présentation est faite sur la base d'une certaine idéalisation : si les lois physiques fondamentales sont présentées, de nombreux aspects technologiques importants (sur la réalisation des enroulements ou sur les fuites) ne peuvent pas être détaillés ; ces questions sont normalement traitées dans des ouvrages consacrés aux aspects techniques et constructifs des machines électriques. Le chapitre 3 détaille les modèles des machines asynchrones à stator et rotor triphasés, et celui des machines synchrones à pôles lisses et à pôles saillants, avec ou sans amortisseurs. Ces modèles débouchent sur des *équations matricielles*, comme cela est annoncé dans le premier chapitre.

Les équations électriques ainsi obtenues (et qui sont les équations physiques) sont *très fortement non linéaires*, beaucoup trop pour que l'on puisse les traiter efficacement tel quel. Il existe, depuis le milieu du XX^e siècle, une série d'outils mathématiques pour les transformer, afin de les mettre sous une forme utilisable, disons « quasi linéaire ». Le nom de Park est attaché à ces techniques mathématiques, mais d'autres scientifiques ont apporté des outils, (Miss) Clarke, Fortescue, Lyon, Ku, pour se limiter à ceux dont les équations seront effectivement exploitées dans le chapitre 4, « Propriétés vectorielles des systèmes électriques triphasés », par Eric Semail, Jean-Paul Louis et Gilles Feld. Les simplifications mathématiques sont basées sur une méthode bien connue en mathématiques, celle du *changement de référentiel*, ou *de repères*, déduit de l'examen *des sous-espaces propres* et *des valeurs propres* des matrices qui ont été déterminées précédemment. Les machines classiques, nous l'avons vu, sont censées répondre à plusieurs hypothèses. En outre, ces machines sont supposées construites à l'aide d'enroulements monophasés, diphasés ou triphasés présentant des symétries. L'espace triphasé, dit aussi « référentiel a-b-c », est celui des équations physiques réelles, dont nous avons dit qu'elles étaient trop complexes. Pourtant ces modèles ont des symétries, et

celles-ci donnent aux matrices des modèles des structures tout à fait particulières. Ces matrices peuvent être carrées ou rectangulaires. Les matrices carrées font apparaître deux sous-espaces propres particulièrement intéressants : *une droite vectorielle qui définit la direction homopolaire*, et *un plan diphasé, orthogonal à la droite vectorielle homopolaire*. On peut alors effectuer des changements de repère qui permettent de définir des *machines équivalentes complètement découplées* : *une machine homopolaire qui ne participe pas à la conversion d'énergie*, et *une machine diphasée responsable de la conversion d'énergie*. On définit donc des *transformations triphasé/diphasé* (nommées ainsi puisque l'on ignore souvent les composantes homopolaires) : on définit des référentiels qui restent liés aux espaces physiques et que l'on nomme « référentiels $\alpha - \beta$ ». Puis il apparaît qu'une *rotation* dans le plan diphasé permet de simplifier au maximum les équations magnétiques et électriques. Au total, on définit la *transformation de Park* qui écrit les équations de la machine dans un référentiel diphasé en rotation, appelé : référentiel $d-q$, où *les composantes relatives de Park* sont appelées $d$ (pour *direct*), et $q$ (pour « *en quadrature* »).

Les propriétés géométriques qui permettent ces efficaces changements de repères, sont étroitement liées aux hypothèses physiques, en particulier la distribution sinusoïdale des champs et la symétrie. Ces hypothèses, que l'on appelle aussi *hypothèses de Park*, définissent en fait la *machine idéale* : si l'on alimente ses phases avec des *courants sinusoïdaux*, le *couple électromagnétique est constant* et *son amplitude est réglable*. Cette machine est dite « bien construite ». Ces machines idéales ont été modélisées de multiples façons et de nombreuses variantes des modèles existent, mais nous considérons que celles-ci *sont toutes strictement équivalentes*, et que c'est par convenance personnelle qu'un modélisateur utilisera un certain type de modélisation plutôt qu'un autre.

Par contre, pour les machines qui ne répondent pas à ces hypothèses, il faudra trouver d'autres transformations, non classiques (un exemple est donné dans le chapitre 3 du second volume).

Nous nous sommes appuyés sur les propriétés des matrices carrées (matrice des inductances d'un stator de machine synchrone ou asynchrone ; matrices des mutuelles entre le stator triphasé et le rotor triphasé d'une machine asynchrone ; matrice de gain d'un onduleur de tension) qui peuvent être diagonalisées au sens classique du terme. Mais nous rencontrons aussi des matrices rectangulaires que l'on ne peut pas diagonaliser. Et il peut être intéressant de ne pas diagonaliser complètement une matrice carrée, par exemple quand une valeur propre est nulle et que l'on n'écrit pas les termes destinés à s'annuler. Nous utiliserons alors un formalisme dû à E.J. Gudefin, qui « factorisait » ces matrices. Les *factorisations* sont des pseudo-diagonalisations dont elles ont les propriétés essentielles : facilité des manipulations algébriques, en particulier pour les inversions. Ce formalisme

matriciel avec ces factorisations a de grands intérêts pédagogiques (par exemple, un enseignant peut aisément faire entièrement tous les calculs matriciels devant ses étudiants), et il permet en outre de donner des interprétations géométriques et des *formalismes entrée-sortie non ambigus*, avec des équivalents des schémas fonctionnels appliqués à ces systèmes multivariables non triviaux que sont les machines à courant alternatif.

De façon schématique, nous pouvons affirmer qu'il existe deux méthodes de modélisation. La première méthode fait appel à un *formalisme réel*, et la transformation triphasé/diphasé (+ homopolaire) utilise la *matrice de Clarke*, ou sa variante normée dite *matrice de Concordia*, et la *matrice de rotation réelle*. Celle-ci est de manipulation très aisée : elle est en particulier facilement inversible. Ce formalisme, globalement appelé *transformation de Park*, est particulièrement utilisé pour modéliser les machines synchrones, surtout lorsqu'elles sont à pôles saillants. Les équations obtenues sont « presque linéaires » et ont été inventées principalement pour étudier les régimes transitoires dans les alternateurs lorsque ceux-ci sont soumis à de fortes perturbations, comme les courts-circuits. Mais il est apparu que le modèle de Park donne un *modèle direct facile à inverser* : cette modélisation a donc été stratégique dans le développement des méthodes de commande modernes dites « contrôle vectoriel ».

Mais la matrice de rotation réelle n'est pas diagonale, et de nombreux modélisateurs préfèrent la diagonaliser complètement, ce qui fait apparaître des exponentiels complexes, effectivement très aisés à manipuler, surtout que la grande tradition de l'électricité a habitué ses utilisateurs au maniement des grandeurs complexes. C'est aussi un moyen très pratique pour définir des *schémas équivalents*. On est amené à utiliser alors la deuxième méthode, qui fait appel à un *formalisme complexe*, et la transformation triphasé/diphasé (+ homopolaire) utilise la *matrice de Fortescue* (bien connue des électrotechniciens pour son usage dans l'étude des systèmes triphasés déséquilibrés), ou sa variante normée, la matrice de Lyon, et la matrice de rotation complexe. Les modèles obtenus sont alors remarquablement diagonaux, mais contiennent en fait les mêmes informations que les modèles réels, diphasés, qui leurs sont strictement équivalents (un vecteur de dimension 2 contient les mêmes informations qu'un nombre complexe avec sa partie réelle et sa partie imaginaire). Le formalisme complexe est particulièrement agréable avec les machines à pôles lisses, ce qui explique son succès international pour la modélisation des machines asynchrones. Pour les grandeurs obtenues après les transformées de Fortescue (ou de Lyon) et la rotation complexe, nous obtenons les *composantes relatives de Ku*, appelées *f-b* (*f* pour *forward*), et *b* pour *backward*).

En pratique, *la composante homopolaire est souvent nulle* : elle ne participe qu'à la création de pertes Joule et on l'élimine facilement avec les montages à trois fils (la composante homopolaire est proportionnelle à la somme des courants, qui est

nulle). Par ailleurs, les composantes diphasées complexes, étant issues d'équations physiques réelles, sont *conjuguées* l'une par rapport à l'autre. La deuxième composante complexe diphasée peut donc se déduire facilement de la première, et de nombreux auteurs n'utilisent que la première composante diphasée complexe, sous le nom de *phaseurs*. Les modèles obtenus sont d'une utilisation conviviales.

Le cinquième chapitre, « Modélisation des machines à courant alternatif par les phaseurs », par Jean-Paul Louis, Gilles Feld et Eric Monmasson, présente cet outil très populaire. Mais nous insistons sur le fait que les représentations complexes et réelles sont strictement équivalentes, que leurs manipulations sont, en fait, complètement similaires, et que ce sont les habitudes des modélisateurs qui déterminent les choix de ces modèles. L'existence de différentes variantes est aussi liée à *l'utilisation (ou non)* de transformées triphasé/diphasé *normées*. Si l'on n'utilise pas une transformée normée, l'expression de la puissance n'est pas conservée, ce qui a un effet sur l'expression du couple électromagnétique, tandis que les transformées normées conservent l'expression de la puissance, ce qui est préféré par certains modélisateurs (mais pas par tous).

L'existence de toutes ces variantes explique la grande variété de modèles (tous équivalents, insistons bien sur ce point !) que l'on rencontre dans la littérature internationale, ce qui peut perturber les lecteurs débutants. C'est pourquoi les chapitres 4 et 5 présentent un certain nombre de ces variantes, tout en insistant sur les propriétés communes. En particulier, pour nous, les phaseurs s'identifient exactement avec la première composante diphasée de Fortescue (ou de Lyon) si l'on reste dans un repère lié aux bobinages réels, ou avec la première composante de Ku (*forward*) si l'on se place dans un repère qui a tourné par rapport au repère des bobinages réels. Certains auteurs parlent à leur sujet de « transformée à un axe ».

Nous l'avons dit, ces méthodes de modélisation ont pour but de définir des *modèles directs aisés à inverser*, les modèles inverses étant un outil très puissant pour concevoir des machines en articulant à la fois les nécessités physiques exigées par la commande de machines et les exigences des méthodes de l'automatique. Les applications à l'études spécifiques des modèles directs et inverses appliqués aux machines synchrones et asynchrones feront l'objet du volume 2 de cet ouvrage.

Les auteurs remercient les collègues qui leur ont fourni des figures et des photographies : Yacine Amara, Jean-Paul Caron, Abderrezzak Rezzoug, Jean-Luc Thomas, ainsi que la société Alstom qui a autorisé la publication de certaines photographies.

Chapitre 1

# Conversion électromécanique d'énergie : du phénomène physique à la modélisation dynamique

## 1.1. Introduction

La modélisation des dispositifs électromécaniques fait appel à deux types de modèle : les modèles de type « champ », ou *modèles locaux*, et les modèles de type « circuit », ou *modèles globaux*.

Les modèles de type « champ », ou modèles locaux, prennent en compte la répartition spatiale des phénomènes ; ils utilisent des grandeurs locales, c'est-à-dire qui peuvent prendre des valeurs en chaque point de l'espace, comme la densité de courant, le champ magnétique, la distribution de vitesse, etc. Ces modèles ont donc un nombre infini de degrés de liberté. Ils sont utilisés pour la conception de dispositifs, mais leur mise en œuvre est normalement trop lourde pour qu'ils puissent être exploités directement dans un algorithme de commande.

Au contraire, les modèles de type « circuit », ou modèles globaux, utilisent des grandeurs globales, comme le courant, la tension, la vitesse de rotation d'un corps, etc. Ces modèles n'ont qu'un nombre fini de degrés de liberté, ce qui autorise leur utilisation dans la commande de machines.

L'introduction des modèles globaux peut se faire de façon déductive à partir des modèles locaux. Cette mise en correspondance des modèles locaux et globaux aurait

---

Chapitre rédigé par Ernest MATAGNE et Manuel DA SILVA GARRIDO.

l'avantage d'éclaircir le lien entre les deux types de modèle, ce qui est utile pour fixer les conditions de validité du modèle global, ainsi qu'en conception de dispositifs. Nous nous sommes laissés guider lors de la définition des variables globales par cette correspondance. L'intérêt de la présenter en détail dans un ouvrage consacré à la commande de machines nous a cependant semblé marginal, et nous préférons donc, à partir de la section 1.3, adopter une introduction plus axiomatique des modèles globaux.

Puisque les machines électriques couramment utilisées sont du type magnétique, nous allons par la suite considérer uniquement les systèmes électromécaniques inductifs.

## 1.2. Le phénomène physique

La première tentative pour établir, de façon axiomatique, un modèle global des systèmes électromécaniques est due à Maxwell, qui a utilisé pour cela les équations de Lagrange [MAX 73]. Ainsi, considérons un circuit électrique inductif (éventuellement déformable) parcouru par un courant $i$ et possédant un seul degré de liberté mécanique $\theta$.

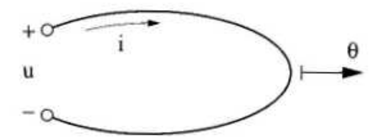



**Figure 1.1.** *Circuit électrique à un degré de liberté mécanique*

Le circuit peut être étudié comme un système lagrangien, ayant comme coordonnées généralisées :

$$q_1 = \theta \qquad q_2 = \int i \, d\tau \qquad [1.1]$$

et comme lagrangien :

$$\Lambda = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \Lambda_e \qquad [1.2]$$

où $J$ est le moment d'inertie mécanique et $\Lambda_e$ est le lagrangien d'origine électrique.

Dans le cas des circuits inductifs qui nous intéressent, le lagrangien d'origine électrique se réduit à la fonction de *co-énergie magnétique*, définie par :

$$w_{cm} = w_{cmo} + \int_0^i \Psi(\theta, i)\, di \qquad [1.3]$$

où $\psi$ est le flux associé au courant $i$, et $w_{cmo}$ un état de référence, non nul s'il y a des aimants permanents, qui sera fixé plus loin à partir de l'énergie magnétique.

Dans son travail original, Maxwell s'est limité à considérer le cas linéaire, pour lequel $w_{cm} = \frac{1}{2}Li^2$, où $L$ est le coefficient d'induction ; la généralisation au cas non linéaire a été proposée par Poincaré [POI 07]. Les équations de Lagrange du circuit inductif sont :

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d\Lambda}{dq_j} = Q_j \quad j = 1,2 \qquad [1.4]$$

où $Q_j$ sont les forces généralisées, y compris les termes de dissipation.

Si l'on considère des dissipations associées à un coefficient de frottement visqueux $K$ du côté mécanique et à une résistance $R$ du côté électrique, les équations de Lagrange donnent les résultats bien connus :

$$c = J\ddot{\theta} + K\dot{\theta} - \frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta} \qquad [1.5a]$$

$$u = Ri + \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \qquad [1.5b]$$

où $c$ est la force mécanique appliquée et $u$ la tension appliquée. Le terme $\frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta}$ représente la force électromécanique sur le circuit.

Cependant, on a constaté rapidement que certains systèmes inductifs, comme la roue de Barlow, les machines de type dynamo et, en général, tous les systèmes présentant des commutations internes, ne satisfont pas les équations de Lagrange [1.4], de sorte que leurs équations globales ont dû continuer à être établies directement à partir des modèles de type champ [FEY 64].

Les difficultés rencontrées dans l'établissement des équations globales des systèmes avec commutations ont été analysées par Poincaré, qui a suggéré que l'on décompose ce type de systèmes en circuits élémentaires décrits par les équations de

Lagrange [1.4] et que leurs équations globales soient obtenues par des moyennes (spatiales ou temporelles) des équations élémentaires.

C'est ce type de démarche que nous allons adopter pour comprendre les mécanismes physiques sous-jacents à ces systèmes électromécaniques, ce qui est utile pour l'établissement de leur modèle dynamique. Pour cela, on choisira un système avec commutations continues, dans lequel on doit considérer des moyennes spatiales, mais on pourrait également considérer un système avec commutations discontinues, impliquant des moyennes temporelles, les propriétés globales à mettre en évidence étant analogues. Considérons donc un milieu conducteur orienté (faisceau de conducteurs) au repos, dans lequel circule un courant électrique $i$.

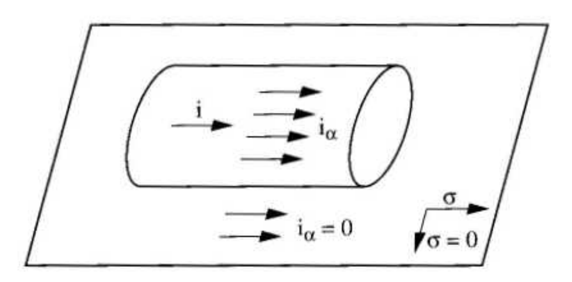



**Figure 1.2.** *Conducteur orienté parcouru par un courant* i

$\sigma$ représente la conductivité électrique. Le circuit sera considéré comme formé par un infini dénombrable de circuits élémentaires $\alpha$. Chaque circuit élémentaire satisfait l'équation fondamentale [1.5b] et donc :

$$u_\alpha = R_\alpha i_\alpha + \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \tau} \quad [1.6]$$

Pour éviter des divergences, cette équation doit être regardée comme l'intégration à un tube élémentaire de l'équation locale :

$$-\nabla V = \frac{\vec{J}}{\sigma} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad [1.7]$$

où $\vec{J}$ est la densité de courant, $\vec{A}$ le potentiel vecteur et $V$ le potentiel scalaire.

Le flux $\psi_\alpha$ représente l'intégrale de ligne du potentiel vecteur $\int \vec{A} \cdot \vec{dl}$ et peut être calculé en négligeant la contribution, élémentaire, du courant propre $i_\alpha$. La définition des variables globales du circuit parcouru par le courant :

$$i = \sum_{\alpha} i_\alpha \qquad [1.8]$$

se fait comme en mécanique rationnelle, en préservant les fonctions du type énergie. Ainsi, le flux global est défini par :

$$\psi = \frac{\sum_{\alpha} \Psi_\alpha i_\alpha}{i} \qquad [1.9]$$

et la tension est donnée par :

$$u = \frac{\sum_{\alpha} u_\alpha i_\alpha}{i} \qquad [1.10]$$

Si l'on combine ces relations avec la loi fondamentale [1.6], on obtient facilement l'équation globale du circuit :

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{d\tau} - \sum_{\alpha} \Psi_\alpha \frac{d}{d\tau}\left(\frac{i_\alpha}{i}\right) \qquad [1.11]$$

où l'on a posé :

$$R = \sum_{\alpha} \frac{R_\alpha i_\alpha^2}{i^2} \qquad [1.12]$$

Nous allons considérer que la répartition $\frac{i_\alpha}{i}$ du courant dans le milieu conducteur dépend d'un certain nombre $n$ de paramètres $K_j$. On a :

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{i_\alpha}{i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \dot{K}_j \frac{\partial}{\partial K_j}\left(\frac{i_\alpha}{i}\right) \qquad [1.13]$$

Pour transformer cette expression, considérons la définition de la co-énergie magnétique :

$$w_{cm} - w_{cmo} = \int_{o}^{i} \psi \, di = \sum_{\alpha} \int_{0}^{i_\alpha} \psi_\alpha \, di_\alpha \qquad [1.14]$$

On calcule facilement :

$$\left(\frac{\partial w_{cm}}{\partial K_j}\right) = \sum_{\alpha} \Psi_\alpha \left(\frac{\partial i_\alpha}{\partial K_j}\right) = \text{i} \sum_{\alpha} \Psi_\alpha \frac{\partial}{\partial K_j}\left(\frac{i_\alpha}{i}\right) \qquad [1.15]$$

Si l'on introduit ce résultat dans l'équation globale du circuit [1.11], on obtient :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{K}_j}{i} \left(\frac{\partial w_{cm}}{\partial K_j}\right) \qquad [1.16]$$

Nous allons considérer parmi les $K_j$ deux types de paramètres :

– ceux qui concernent le déplacement global du courant $i$ par rapport au milieu conducteur :

$$\rho_j = K_j \qquad j = 1 \ldots p \qquad [1.17]$$

– ceux qui concernent uniquement la répartition interne des courants $i_\alpha$ dans le courant $i$ :

$$\eta_j = K_j \qquad j = p + 1 \ldots n \qquad [1.18]$$

Si l'on introduit cette séparation dans l'équation globale du circuit, on a :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} - \sum_{j=1}^{p} \frac{\dot{\rho}_j}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho_j} - \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\dot{\eta}_j}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \eta_j} \qquad [1.19]$$

Considérons maintenant un changement de référentiel de sorte que le milieu conducteur apparaît en mouvement. Tout reste invariant dans l'équation [1.19], sauf les paramètres $\rho_j$ concernant la position globale du courant. Dans le nouveau référentiel, l'équation [1.19] devient :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\dot{\theta}_j - \dot{\rho}_j}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho_j} - \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\dot{\eta}_j}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \eta_j} \qquad [1.20]$$

où $\theta_j$ sont les vitesses du conducteur selon les paramètres de position du courant $\rho_j$. Cette équation est l'équation générale d'un circuit inductif, qui a été obtenue en considérant des moyennes spatiales sur le volume du circuit, mais qui aurait pu être établie en considérant des processus physiques impliquant des moyennes temporelles. Nous verrons plus tard quelle est l'interprétation dynamique des termes additionnels de l'équation [1.20] par rapport à l'équation fondamentale [1.5b].

Il est possible d'introduire dans l'équation générale des simplifications qui sont suffisantes pour étudier les machines électriques les plus élémentaires.

Ainsi, les circuits qui ne dépendent pas de la répartition interne des courants $i_\alpha$ sont appelés *circuits linéiques* et obéissent à l'équation simplifiée :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\dot{\theta}_j - \dot{\rho}_j}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho_j} \quad [1.21]$$

Les circuits linéiques qui ne possèdent pas de termes de glissement du courant global par rapport au milieu conducteur s'appellent *circuits filiformes* et obéissent à l'équation :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} \quad [1.22]$$

Les circuits filiformes sont, en fait, les seuls qui ont été considérés par Maxwell dans la théorie dynamique des circuits. Ils sont suffisants pour étudier les machines à courant alternatif classiques (machines synchrones et asynchrones), mais ne suffisent pas pour étudier les machines à courant continu classiques (machines DC à balais), pour lesquelles il faut considérer un terme de glissement et adopter l'équation d'induit :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\dot{\theta} - \dot{\rho}}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \quad [1.23]$$

où $\theta$ représente la coordonnée de position du rotor et $\rho$ la coordonnée de position des balais. Ainsi, par la suite, nous allons considérer l'équation [1.23] comme étant l'équation électrique minimale nécessaire pour établir une théorie dynamique des machines électriques avec un minimum de généralité. Les circuits de ce type sont appelés « circuits glissants » ou « circuits à contacts glissants » ou encore « circuits à commutation ».

Pour établir l'équation mécanique qui l'associe à l'équation [1.23], nous allons utiliser la conservation de l'énergie. La puissance transmise au milieu mécanique est donnée par :

$$\pi = (u - Ri)\, i - \frac{dw_m}{d\tau} \qquad [1.24]$$

où $w_m$ représente l'énergie magnétique définie par :

$$w_m = w_{mo} + \int_{\psi_o}^{\psi} i(\theta, \psi, \rho) d\psi \qquad [1.25]$$

$w_{mo}$ étant l'énergie pour l'état de référence $i = 0$, non nulle s'il y a des aimants permanents. Nous fixerons une co-énergie magnétique de référence $w_{cmo} = -w_{mo}$, de sorte que l'on aura :

$$w_m + w_{cm} = i\ \psi \qquad [1.26]$$

Ce résultat signifie que l'énergie et la co-énergie magnétique sont liées par la transformation de Legendre ; donc l'énergie joue le rôle d'hamiltonien du système, la co-énergie jouant celui de lagrangien. Dans une représentation graphique, les deux fonctions s'identifient aux surfaces hachurées dans la figure 1.3.

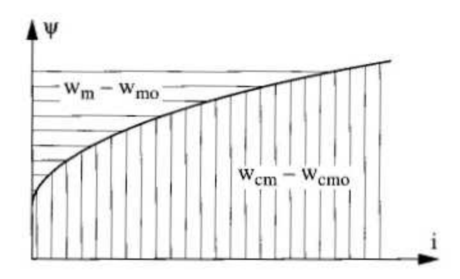



**Figure 1.3.** *Représentation graphique des fonctions énergie et co-énergie*

Une propriété bien connue de la transformation de Legendre donne :

$$\frac{\partial w_{cm}}{\partial K} = -\frac{\partial w_m}{\partial K} \qquad [1.27]$$

où $K$ est un paramètre quelconque ($\theta$, $\rho$...).

Si l'on introduit l'équation électrique [1.23] dans le bilan énergétique [1.24], compte tenu de [1.27], on obtient :

 [redacted]

$$\pi = (\frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta} + \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho})\,\dot{\theta} \qquad [1.28]$$

Ce résultat montre que la force généralisée d'origine électromagnétique est :

$$c_e = \frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta} + \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.29]$$

Le premier terme est associé à la force directement exercée sur des matériaux magnétiques du système mécanique et le second est associé à la force de Laplace sur le courant. L'équation mécanique est alors :

$$c = J\,\ddot{\theta} + K\,\dot{\theta} - (\frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta} + \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho}) \qquad [1.30]$$

Pour étudier le système électromécanique, nous disposons de l'équation électrique [1.23], de l'équation mécanique [1.30] et nous avons trois variables indépendantes $\theta$, $i$ et $\rho$.

Il nous faut encore une équation de liaison entre ces trois variables :

$$f(\theta, i, \rho, \tau) = 0 \qquad [1.31]$$

Dans le cas des machines à courant continu classiques, cette équation est simplement :

$$\rho = c^{te} \qquad [1.32]$$

Dans le cas des circuits filiformes, on a par contre :

$$\rho = \theta \qquad [1.33]$$

ce qui permet d'éliminer la variable $\rho$ et de retrouver les équations simplifiées [1.5], en fonction des seules variables $i$ et $\theta$.

Une fois compris les mécanismes physiques sous-jacents aux modèles globaux des circuits, il est possible de passer à une formulation dynamique directe, qui ne tient pas compte, explicitement, de ces mécanismes.

## 1.3. Modélisation dynamique

Nous allons discuter la modélisation dynamique d'un circuit linéique par les équations [1.25], [1.30] et [1.31] :

$$u = Ri + \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\dot{\theta} - \dot{\rho}}{i}\frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.34a]$$

$$c = J\ddot{\theta} + K\dot{\theta} - \left(\frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta} + \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho}\right) \qquad [1.34b]$$

$$f(\theta, i, \rho, \tau) = 0 \qquad [1.34c]$$

Nous représentons schématiquement le système par un courant $i$, avec une coordonnée de position $\rho$, circulant dans un milieu conducteur ($\sigma \neq 0$) et magnétique ($\mu \neq \mu_0$), ayant une coordonnée de position $\theta$, de même nature que $\rho$.

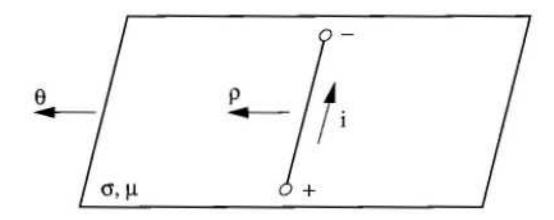



**Figure 1.4** *Représentation d'un circuit glissant*

L'équation électrique du circuit sera considérée comme étant de la forme :

$$u = \frac{d\psi}{d\tau} + e \qquad [1.35]$$

où la f.é.m. (force électromotrice) $e$ doit contenir, en plus du terme $Ri$, le terme de glissement :

$$\frac{\dot{\theta} - \dot{\rho}}{i}\frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho}$$

Pour obtenir ce résultat, considérons un circuit fictif, dont les variables seront affectées de l'indice « ' » , qui n'est parcouru par aucun courant, soit :

$$i' = 0 \qquad [1.36]$$

Ce circuit fictif coïncide avec le circuit réel à l'instant considéré, mais évolue ensuite comme un circuit filiforme, avec :

$$\dot{\rho}' = \dot{\theta} \qquad [1.37]$$

Nous admettrons que les extrémités du circuit fictif restent fixées sur les extrémités du circuit réel (ce qui implique une déformation locale du circuit fictif), de sorte que :

$$u' = u \qquad [1.38]$$

Comme le circuit fictif est filiforme, dans son équation :

$$u' = \frac{d\psi'}{d\tau} + e' \qquad [1.39]$$

la f.é.m. $e'$ ne contient pas de terme de glissement. Elle se réduit à la f.é.m. ohmique, associée au courant $i$ du circuit réel par l'intermédiaire de la résistance mutuelle, qui est égale à la résistance propre $R$ du circuit réel, puisque les deux circuits coïncident :

$$e' = R\,i \qquad [1.40]$$

La différence entre les flux $\psi'$ et $\psi$ provient uniquement du fait que la variable $\rho'$ évolue différemment de $\rho$. Alors :

$$\frac{d\psi'}{d\tau} = \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial\psi'}{\partial\rho'}(\dot{\rho}' - \dot{\rho}) \qquad [1.41]$$

Compte tenu de l'équation [1.37], on peut donc écrire :

$$\frac{d\psi'}{d\tau} = \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial\psi'}{\partial\rho'}(\dot{\theta} - \dot{\rho}) \qquad [1.42]$$

L'ensemble des relations établies permet de conclure que la f.é.m. dans le circuit réel est :

$$e = Ri + \frac{\partial\psi'}{\partial\rho'}(\dot{\theta} - \dot{\rho}) \qquad [1.43]$$

Puisque le courant $i'$ est nul, on obtient directement de la définition de la co-énergie magnétique que :

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \rho'} = \frac{1}{i'} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho'} \qquad [1.44]$$

Le second membre de [1.44] représente la force généralisée par unité de courant, qui est la même pour le circuit fictif et le circuit réel. Alors :

$$\frac{1}{i'} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho'} = \frac{1}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.45]$$

Ce résultat peut être directement obtenu en utilisant les propriétés de symétrie des flux. Si l'on introduit le résultat dans la f.é.m. $e$, on obtient le résultat escompté :

$$e = Ri + \frac{\dot{\theta} - \dot{\rho}}{i} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.46]$$

Ce résultat a été obtenu sans considérer, explicitement, les mécanismes internes de commutation utilisés dans le paragraphe précédent. Il peut donc être de portée plus générale, mais les interprétations physiques données ci-dessus pourraient alors être mises en défaut.

La f.é.m. de glissement ne figure pas dans l'équation de Lagrange [1.4] et elle résulte d'un transfert direct d'énergie entre la partie mécanique et la partie électrique du système. On va associer ce terme à des forces de liaison internes du système. Pour cela, prenons comme coordonnées généralisées du système :

$$q_1 = \theta \qquad q_2 = \int i \, d\tau \qquad q_3 = \rho \qquad [1.47]$$

et considérons que ces coordonnées sont soumises à une condition de liaison, représentée par l'équation [1.34c] :

$$f(\theta, i, \rho, \tau) = 0 \qquad [1.48]$$

Le lagrangien du système sera toujours :

$$\Lambda = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + w_{cm}(\theta, \mathrm{i}, \rho) \qquad [1.49]$$

où nous avons une dépendance de la co-énergie magnétique par rapport à $\rho$ (position du courant) et par rapport à $\theta$ (position du matériau magnétique du milieu mécanique). Les équations de mouvement sont alors les équations de Lagrange avec forces de liaison :

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} = Q_j + S_j \qquad j = 1, 2, 3 \qquad [1.50]$$

où les $Q_j$ sont toujours les forces appliquées (y compris les termes de dissipation) et les $S_j$ sont les forces de liaison internes. Les forces de liaison de nature mécanique satisfont l'égalité de l'action et de la réaction :

$$S_1 + S_3 = 0 \qquad [1.51]$$

et l'ensemble des forces de liaison développe une puissance nulle :

$$\sum_{j=1}^{3} S_j \dot{q}_j = 0 \qquad [1.52]$$

Il est facile de calculer la force de liaison $S_3$ selon la coordonnée $q_3 = \rho$. En effet, il n'y a pas de force appliquée $Q_3$ selon la coordonnée $q_3 = \rho$ : la force sur les balais d'une machine à courant continu est nulle et il n'y a pas de processus de dissipation associé à cette coordonnée de position.

Puisque le lagrangien [1.49] ne dépend pas de $\dot{q}_3 = \dot{\rho}$, l'équation [1.50] fournit, pour $j = 3$ :

$$S_3 = -\frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.53]$$

Donc, par l'égalité d'action et réaction traduit dans l'équation [1.51], on a :

$$S_1 = \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.54]$$

et, par la condition [1.52], on obtient :

$$S_2 = -\frac{\dot{\theta} - \dot{\rho}}{i}\frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho} \qquad [1.55]$$

Remarquons que la force de liaison de $S_2$ reste déterminée même quand $i$ est nul, parce que la force $\dfrac{\partial w_{cm}}{\partial \rho}$ tend vers zéro avec $i$ au moins aussi vite que celui-ci.

Les équations de Lagrange [1.50] fournissent alors, pour les coordonnées $j = 1, 2$, les équations [1.34a] et [1.34b], lesquelles jointes à la condition de liaison [1.34c] déterminent le mouvement. On retrouve ainsi, directement, les équations globales obtenues par une analyse détaillée du processus physique de commutation.

Remarquons que même dans le cas où la condition de liaison [1.48] est intégrable, on ne peut pas s'en servir pour éliminer, *a priori*, la coordonnée $q_3 = \rho$ et faire un modèle sans liaisons, comme celui représenté par l'équation initiale [1.4]. En effet, la liaison [1.48] appartient à une classe spéciale de liaisons, appelées *liaisons de seconde espèce*, pour lesquelles les conditions de travail virtuel nul des forces de liaison ne sont pas données par les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, ce qui empêche l'élimination de variables dépendantes [BEG 22]. Les conditions de travail virtuel nul doivent être recherchées directement par l'étude du système. Elles sont, dans notre cas :

$$\delta\theta - \delta\rho - \frac{\dot{\theta} - \dot{\rho}}{i}\,\delta q = 0 \qquad [1.56]$$

soit :

$$\sum_{j=1}^{3} A_j\,\delta q_j = 0 \qquad [1.57]$$

où l'on doit supposer $i \neq 0$.

La méthode classique des multiplicateurs de Lagrange permet alors d'écrire :

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} = Q_j + \lambda A_j \qquad j = 1, 2, 3 \qquad [1.58]$$

lesquelles, jointes à la condition de liaison, déterminent le mouvement et le multiplicateur de Lagrange $\lambda$, donc les forces de liaison $S_j = \lambda A_j$. Remarquons que le multiplicateur de Lagrange tend vers zéro avec $i$, de sorte que l'équation [1.58] reste valable même pour $i = 0$.

 [redacted]

Dans le cas particulier des circuits filiformes, la condition de liaison [1.48] devient :

$$\rho = \theta \qquad [1.59]$$

et la condition de travail virtuel nul des forces de liaison [1.56] devient :

$$\delta\theta - \delta\rho = 0 \qquad [1.60]$$

Or, ces déplacements virtuels sont, simplement, ceux compatibles avec la condition de liaison [1.59], ce qui signifie que les liaisons électromécaniques ont dégénéré *en `liaisons de première espèce*. Comme la condition de liaison est intégrable, on peut alors s'en servir pour éliminer, *a priori*, la variable dépendante $\rho$, ce qui conduit au modèle sans liaisons, originalement proposé par Maxwell et décrit par les équations [1.1] à [1.4].

Dans le cas avec termes de glissement, on ne peut pas se débarrasser de la coordonnée $q_3 = \rho$, mais on peut se débarrasser, formellement, des forces de liaison selon les coordonnées $q_1 = q$ et $q_2 = \int i \, d\tau$. Pour cela, on introduit une transformation des vitesses généralisées :

$$\dot{q}'_j = \dot{q}_j \quad j = 1, 2 \qquad [1.61a]$$

$$\dot{q}'_3 = \sum_k A_k \, \dot{q}_k = 0 \qquad [1.61b]$$

où les $A_k$ sont les coefficients de la condition de travail virtuel nul [1.57]. Les équations lagrangiennes selon les coordonnées $q_1$ et $q_2$ s'écrivent alors :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \dot{q}'_j} - \sum_{k=1}^{3} \Omega_{kj} \frac{\partial \Lambda'}{\partial q_k} = Q'_j \quad j = 1, 2 \qquad [1.62]$$

où $\Omega_{kj}$ représente la matrice de transformation inverse de [1.61] et où :

$$Q'_j = \Sigma \, \Omega_{kj} \, Q_k = Q_j, \quad \Lambda' = \Lambda$$

Les équations [1.62] sont des équations de Boltzmann-Hamel. Jointes à la condition de liaison [1.48], elles décrivent le mouvement du système.

### 1.4. Equations matricielles des machines électriques

Les équations précédentes sont susceptibles d'une présentation plus familière si l'on se limite au cas des circuits linéaires. En pensant déjà au cas des machines électriques, où nous avons plusieurs circuits simultanément, la co-énergie magnétique s'écrit alors :

$$w_{cm} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab}\, i_a\, i_b \qquad [1.63]$$

où $L_{ab}$ sont les coefficients d'induction. Si l'on a un seul rotor, le lagrangien mécanique sera toujours :

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \qquad [1.64]$$

Donc, le lagrangien total sera de la forme :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta \qquad [1.65]$$

Considérons d'abord les équations de Lagrange [1.4]. On peut calculer facilement :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\gamma} = \sum_{\beta} a_{\gamma\beta}\, \ddot{q}_\beta + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\alpha}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta \qquad [1.66a]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\gamma}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta \qquad [1.66b]$$

Les équations [1.4] prennent alors la forme :

$$\sum_{\beta} a_{\gamma\beta}\, \ddot{q}_\beta + \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right) \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta = Q_\gamma \qquad [1.67]$$

Si l'on introduit le symbole de Christoffel de première espèce défini par :

$$[\alpha\beta,\gamma] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right) \qquad [1.68]$$

L'équation [1.67] s'écrit :

$$\sum_{\beta} a_{\gamma\beta} \ddot{q}_{\beta} + \sum_{\alpha,\beta} [\alpha\beta,\gamma] \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = Q_{\gamma} \qquad [1.69]$$

Cette équation peut être interprétée comme décrivant le mouvement d'un point dans un espace de configuration dont les coordonnées sont les variables $q_{\alpha}$. Cet espace est pourvu d'une métrique de Riemann :

$$ds^2 = 2\,\Lambda\, d\tau^2 = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}q_{\alpha}\, \mathrm{d}q_{\beta} \qquad [1.70]$$

Le formalisme peut être étendu au cas des circuits saturés, mais il faut alors utiliser la géométrie de Finsler [VON 68].

Lorsqu'il y a dans le système des circuits avec des termes de glissement, comme dans les machines à courant continu, les équations de Lagrange [1.4] sont remplacées par les équations de Boltzmann-Hamel [1.62] et l'équation de mouvement [1.69] devient :

$$\sum_{\beta} a_{\gamma\beta} \ddot{q}_{\beta} + \sum_{\alpha,\beta} [[\alpha\beta,\gamma]] \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = Q_{\gamma} \qquad [1.71]$$

où $[[\alpha\beta,\gamma]]$ est la forme non holonome du symbole de Christoffel. Cette forme non holonome est définie par :

$$[[\alpha\beta,\gamma]] = \frac{1}{2}\,(\partial_{\beta} a_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} a_{\beta\gamma} - \partial_{\gamma} a_{\alpha\beta}) \qquad [1.72]$$

où :

$$\partial_{\alpha} = \sum_{\beta} \Omega_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} \qquad [1.73]$$

L'utilisation des équations précédentes en machines électriques n'est pas très courante et on préfère utiliser des équations matricielles. Sauf lorsque l'on linéarise les équations pour des mouvements autour d'un point de fonctionnement, il n'est pas possible d'écrire une équation matricielle générale, qui inclue simultanément les équations électriques et l'équation mécanique des machines. En effet, pour cela, il faudrait utiliser des objets géométriques à trois indices, comme nous venons de le voir, qui ne sont pas du domaine du calcul matriciel. Mais il est possible d'écrire

sous forme matricielle les équations électriques d'une part et l'équation mécanique de l'autre. Nous allons procéder de cette façon.

### 1.4.1. *Equation matricielle électrique*

Si l'on considère uniquement les machines électriques classiques, on sait qu'elles disposent d'un stator avec des circuits filiformes et d'un rotor, animé de vitesse $\dot{\theta}_r$, lequel comporte soit des circuits filiformes, soit des circuits à commutation.

L'équation électrique des circuits statoriques, filiformes, est :

$$u_a = R_a\, i_a + \frac{d\psi_a}{d\tau} \qquad [1.74]$$

Pour les circuits rotoriques, qui peuvent être à commutation, on doit inclure le terme de contacts glissants et considérer l'équation :

$$u_a = R_a\, i_a + \frac{d\psi_a}{d\tau} + \frac{\dot{\theta}_r - \dot{\rho}_{ra}}{i_a}\,\frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho_{ra}} \qquad [1.75]$$

où $\rho_{ra}$ représente la coordonnée de position du circuit a du rotor. Dans les machines classiques, on a $\dot{\rho}_{ra} = \dot{\theta}_r$ quand les circuits rotoriques sont filiformes, ce qui annule le dernier terme, ou alors on a $\dot{\rho}_{ra} = \dot{\rho}_r$ quand les circuits sont à commutation, puisque les balais mécaniques sont solidaires (normalement fixes).

Considérons maintenant les $n$ circuits électriques de la machine et traitons successivement les différents termes des équations [1.74] et [1.75].

Ces termes sont :

$$u'_a = R_a\, i \qquad [1.76a]$$

$$u''_a = \frac{d\psi_a}{d\tau} \qquad [1.76b]$$

ainsi que le dernier terme de l'équation [1.75]. qui peut exister au rotor :

$$u'''_a = \frac{\dot{\theta}_r - \dot{\rho}_{ra}}{i_q} \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho_{ra}} \qquad [1.76c]$$

Considérons les matrices de courant et de tension définies par :

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ : \\ i_n \end{bmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ : \\ u_n \end{bmatrix} \qquad [1.77]$$

On peut écrire sous forme matricielle les $n$ tensions $u'_a$ en introduisant une matrice de résistances :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & R_2 & . & . & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 0 & . & . & . & R_n \end{bmatrix} \qquad [1.78]$$

On obtient alors l'équation matricielle :

$$\mathbf{U'} = \mathbf{R\,I} \qquad [1.79]$$

où **U'** est la matrice colonne des tensions $u'_a$.

Pour écrire sous forme matricielle les tensions $u''_a$, on doit introduire la matrice, symétrique, des coefficients d'induction :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & . & . & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & . & . & L_{2n} \\ : & : & : & : & : \\ L_{n1} & . & . & . & L_{nn} \end{bmatrix} \qquad [1.80]$$

Les coefficients d'induction sont fonction des coordonnées de position $\rho_{ra}$ des circuits mobiles et, éventuellement, de la coordonnée de position $\theta_r$ du rotor, si celui-ci possède des saillances magnétiques :

$$L_{ab} = L_{ab}\,(\theta_r, \rho_{r1}, \ldots, \rho_{rn}) \qquad [1.81]$$

L'équation matricielle relative aux tensions $u''_a$ est alors :

$$\mathbf{U''} = \frac{d}{d\tau}(\mathbf{L}\,\mathbf{I}) \qquad [1.82]$$

que l'on peut développer :

$$\mathbf{U''} = \mathbf{L}\,\frac{d}{d\tau}\mathbf{I} + (\frac{\partial}{\partial\theta_r}\mathbf{L})\mathbf{I}\,\dot{\theta}_r + \sum_a (\frac{\partial}{\partial\rho_{ra}}\mathbf{L})\mathbf{I}\,\dot{\rho}_{ra} \qquad [1.83]$$

Il est utile d'introduire les matrices :

$$\mathbf{P}_r = \frac{\partial}{\partial\theta_r}\mathbf{L} \qquad \mathbf{H}_{ra} = \frac{\partial}{\partial\rho_{ra}}\mathbf{L} \qquad [1.84]$$

et d'écrire l'équation [1.83] ainsi :

$$\mathbf{U''} = \mathbf{L}\,\frac{d}{d\tau}\mathbf{I} + \mathbf{P}_r\,\mathbf{I}\,\dot{\theta}_r + \sum_a \mathbf{H}_{ra}\,\mathbf{I}\,\dot{\rho}_{ra} \qquad [1.85]$$

Les matrices $\mathbf{H}_{ra}$ sont symétriques et possèdent une seule ligne et une seule colonne non nulles :

$$\mathbf{H}_{ra} = \begin{bmatrix} 0 & . & \frac{\partial L_{1a}}{\partial\rho_{ra}} & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial L_{a1}}{\partial\rho_{ra}} & . & \frac{\partial L_{aa}}{\partial\rho_{ra}} & . & \frac{\partial L_{an}}{\partial\rho_{ra}} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & \frac{\partial L_{na}}{\partial\rho_{ra}} & . & 0 \end{bmatrix} \qquad [1.86]$$

Dans les machines électriques classiques, les circuits rotoriques sont tous animés d'une même vitesse $\dot{\rho}_r$ (égale à $\dot{\theta}_r$ ou nulle, selon que les circuits sont filiformes ou à commutation), de sorte que l'on peut définir une matrice :

$$\mathbf{H}_r = \sum_a \mathbf{H}_{ra} \qquad [1.87]$$

et écrire l'équation [1.85] comme :

$$\mathbf{U''} = \mathbf{L}\ \frac{d}{d\tau}\mathbf{I} + \mathbf{P}_r\,\mathbf{I}\ \dot{\theta}_r\ + \mathbf{H}_r\,\mathbf{I}\ \dot{\rho}_r \qquad [1.88]$$

Considérons, finalement, les tensions $u'''_a$ associées à d'éventuels circuits à commutation dans le rotor. Si l'on écrit la co-énergie magnétique [1.63] sous forme matricielle, on a :

$$\mathrm{w}_{cm} = \frac{1}{2}\,\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{L}\,\mathbf{I} \qquad [1.89]$$

où $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}$ est la matrice transposée de **I**. Les équations [1.76c] s'écrivent alors :

$$\mathbf{U'''} = \sum_a\ \mathbf{G}_{ra}\,\mathbf{I}\,(\dot{\theta}_r - \dot{\rho}_{ra}) \qquad [1.90]$$

où l'on introduit les matrices asymétriques avec une seule ligne non nulle :

$$\mathbf{G}_{ra} = \begin{bmatrix} 0 & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \dfrac{\partial L_{a1}}{\partial \rho_{ra}} & . & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L_{aa}}{\partial \rho_{ra}} & . & \dfrac{\partial L_{an}}{\partial \rho_{ra}} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & 0 \end{bmatrix} \qquad [1.91]$$

On peut observer que l'on a :

$$\mathbf{H}_{ra} = \mathbf{G}_{ra} + \mathbf{G}_{ra}^{\mathrm{T}} \qquad [1.92]$$

ce qui montre bien la différence entre l'effet Faraday classique et l'effet d'induction associé aux contacts glissants.

Dans le cas des machines à commutation classiques, on peut définir la matrice :

$$\mathbf{G}_r = \sum_a\ \mathbf{G}_{ra} \qquad [1.93]$$

et écrire l'équation [1.90] comme :

$$\mathbf{U'''} = \mathbf{G}_r \, \mathbf{I} \, (\dot{\theta}_r - \dot{\rho}_r) \quad [1.94]$$

On peut finalement écrire l'équation matricielle électrique complète en faisant la somme des équations [1.79], [1.88] et [1.94], ce qui donne :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{I} + \mathbf{L} \frac{d}{d\tau} \mathbf{I} + \mathbf{P}_r \, \mathbf{I} \, \dot{\theta}_r + \mathbf{H}_r \, \mathbf{I} \, \dot{\rho}_r + \mathbf{G}_r \, \mathbf{I} \, (\dot{\theta}_r - \dot{\rho}_r) \quad [1.95]$$

Cette équation matricielle peut être particularisée pour les différents types de machines classiques. Ainsi, les deux premiers termes représentent les effets présents dans un simple *transformateur*, qui est décrit par l'équation :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{I} + \mathbf{L} \frac{d}{d\tau} \mathbf{I} \quad [1.96]$$

Pour une *machine à courant continu* classique, le troisième terme est nul, parce qu'il n'y a pas de saillances dans le rotor, et le quatrième terme est nul parce que les balais sont fixes, de sorte que :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{I} + \mathbf{L} \frac{d}{d\tau} \mathbf{I} + \mathbf{G}_r \, \mathbf{I} \, \dot{\theta}_r \quad [1.97]$$

Finalement, pour les *machines à courant alternatif* (synchrones et asynchrones), seul le dernier terme s'annule parce que $\dot{\theta}_r = \dot{\rho}_r$. Représentant par $\dot{\theta} = \dot{\theta}_r = \dot{\rho}_r$ la valeur commune des vitesses de rotation, on a :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{I} + \mathbf{L} \frac{d}{d\tau} \mathbf{I} + (\mathbf{P}_r + \mathbf{H}_r) \, \mathbf{I} \, \dot{\theta} \quad [1.98]$$

On peut encore simplifier l'écriture de cette équation en considérant $\theta$ comme une nouvelle variable de position concernant l'ensemble rigidement lié « matériau magnétique/circuits filiformes » et telle que :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{L} = \mathbf{P}_r + \mathbf{H}_r \quad [1.99]$$

L'équation [1.98] s'écrit alors :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{I} + \mathbf{L}\,\frac{d}{d\tau}\,\mathbf{I} + (\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{L})\,\mathbf{I}\,\dot{\theta} \qquad [1.100]$$

qui est la forme habituellement trouvée dans l'analyse matricielle des machines électriques.

### 1.4.2. *Equation matricielle mécanique*

Le seul aspect nouveau à considérer dans l'équation mécanique est l'écriture, sous forme matricielle, du couple d'origine électromagnétique :

$$c_{re} = \frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta_r} + \sum_a \frac{\partial w_{cm}}{\partial \rho_{ra}} \qquad [1.101]$$

En utilisant les résultats déjà établis, on peut écrire :

$$c_{re} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{P}_r + \mathbf{H}_r)\,\mathbf{I} \qquad [1.102]$$

Dans le cas des *machines à courant alternatif*, on peut utiliser [1.99] et écrire le couple électromécanique comme :

$$c_{re} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\,(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{L})\,\mathbf{I} \qquad [1.103]$$

Pour les *machines à courant continu*, puisque $\mathbf{P}_r$ est nul, on a simplement :

$$c_{re} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}_r\,\mathbf{I} \qquad [1.104]$$

Dans l'équation électrique [1.97] figure la matrice $\mathbf{G}_r$ et non la matrice $\mathbf{H}_r$. Il est donc préférable d'utiliser $\mathbf{G}_r$ dans l'expression du couple, ce que l'on obtient compte tenu du fait que :

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{G}_r + \mathbf{G}_r^{\mathrm{T}} \qquad [1.105]$$

Si l'on introduit cette relation en [1.104], on obtient immédiatement :

$$c_{re} = \mathbf{I}^T \, \mathbf{G}_r \, \mathbf{I} \qquad [1.106]$$

qui rend plus évidente la conversion électromécanique d'énergie dans les machines à courant continu.

## 1.5. Exemple d'application : la machine synchrone à aimants permanents

L'applicabilité de la théorie développée ci-dessus aux machines classiques a été plusieurs fois mentionnée dans l'exposé de la théorie. Nous aurions aimé d'une part approfondir le rôle que cette théorie peut jouer pour la commande d'actionneurs conçus selon les mêmes principes que les machines classiques, et d'autre part développer son usage pour la modélisation de machines non conventionnelles. Faute de place, nous n'aborderons ici qu'un seul exemple d'application, celui d'un actionneur synchrone à aimants permanents. Le lecteur pourra trouver d'autres exemples, plus complets, à la référence [MAT 02].

Considérons maintenant un actionneur synchrone possédant un stator diphasé et un rotor à aimants permanents, représentée schématiquement en figure 1.5.

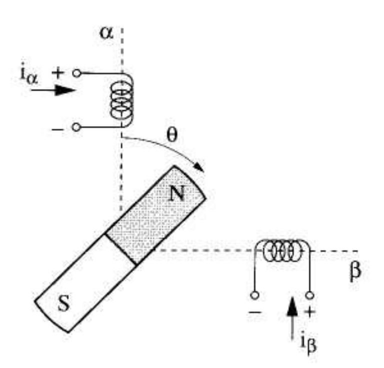



**Figure 1.5.** *Représentation schématique d'une machine synchrone à aimants*

Les équations électriques sont du type [1.5b], soit :

$$u_\alpha = R\, i_\alpha + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \tau} \qquad [1.107a]$$

$$u_\beta = R\, i_\beta + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \tau} \quad [1.107b]$$

Dans le cas général non linéaire, les fonctions $\psi_a$ et $\psi_b$ sont assez difficiles à identifier, car elles dépendent, tout comme la fonction de co-énergie $w_{cm}$, de trois variables, à savoir $i_a$, $i_b$ et $\theta$. Nous allons considérer successivement deux simplifications permettant de simplifier ces relations, et par là de faciliter leur implémentation dans un algorithme utilisé en temps réel.

### 1.5.1. *Cas de matériaux magnétiques linéaires*

En négligeant le phénomène de saturation magnétique, on peut remplacer les équations [107] par :

$$\psi_\alpha = \psi_{\alpha o}(\theta) + L_\alpha(\theta)\, i_\alpha + M(\theta)\, i_\beta \quad [1.108a]$$

$$\psi_\beta = \psi_{\beta o}(\theta) + L_\beta(\theta)\, i_\beta + M(\theta)\, i_\alpha \quad [1.108b]$$

où $L_\alpha$ et $L_\beta$ sont les coefficients incrémentaux d'induction propre, $M$ le coefficient mutuel, et $\psi_{\alpha o}$ et $\psi_{\beta o}$ les flux en l'absence de courants.

La co-énergie magnétique est :

$$w_{cm} = w_{cmo} + \int_{0,0}^{i_\alpha,0} \psi_\alpha(\theta)\, \mathrm{d}i_\alpha + \int_{i_\alpha,0}^{i_\alpha,i_\beta} \psi_\beta(\theta)\, \mathrm{d}i_\beta \quad [1.109]$$

soit :

$$w_{cm} = w_{cmo} + \psi_{\alpha o}\, i_a + \psi_{\beta o}\, i_\beta + \frac{1}{2} L_\alpha\, i_\alpha^2 + M\, i_\alpha\, i_\beta + \frac{1}{2} L_\beta\, i_\beta^2 \quad [1.110]$$

Le couple électromagnétique sur le rotor est :

$$c_e = \frac{\partial w_{cm}}{\partial \theta} \quad [1.111]$$

qui fait intervenir tous les termes de [1.110] puisqu'ils sont tous fonctions de $\theta$.

Pour la commande de machines, un cas particulièrement intéressant est celui où l'on peut négliger l'anisotropie magnétique du rotor, associée à la perméabilité incrémentale, ce qui arrive dans les machines dites à aimants de surface. Dans ce cas, les coefficients d'auto-induction sont constants et la mutuelle est nulle :

$$L_\alpha = L_\beta = \Lambda \qquad M = 0 \qquad [1.112]$$

Les équations électriques sont alors :

$$u_\alpha = R\, i_\alpha + L\, \frac{\partial i_\alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi_{\alpha o}}{\partial \theta}\, \dot{\theta} \qquad [1.113a]$$

$$u_\beta = R\, i_\beta + L\, \frac{\partial i_\beta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi_{\beta o}}{\partial \theta}\, \dot{\theta} \qquad [1.113b]$$

Ces équations sont celles d'une ligne électrique avec des tensions aux extrémités $u_\alpha$ et $u_\beta$, $u'_\alpha = \frac{\partial \psi_{\alpha o}}{\partial \theta}\, \dot{\theta}$ et $u'_\beta = \frac{\partial \psi_{\beta o}}{\partial \theta}\, \dot{\theta}$, ce qui permet d'adapter dans la commande de ces machines les méthodes développées pour l'étude des filtres actifs de puissance dans les réseaux électriques.

### 1.5.2. *Prise en compte de la saturation dans le cas d'enroulements sinusoïdaux*

Une autre façon de simplifier les équations consiste à supposer que les enroulements sont répartis de façon sinusoïdale. On peut alors remplacer les circuits $\alpha$ et $\beta$ par des circuits direct $d$ et en quadrature $q$ dont les grandeurs sont reliées à celles des circuits $\alpha$ et $\beta$ par la transformation de Park :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} \qquad [1.114]$$

Ces nouveaux circuits sont des circuits glissants : étant situés au stator, la matière qui les constitue a une position invariable, tandis que la position de ces circuits proprement dits dépend de la position $\theta$. On a donc :

$$\dot{\theta}_d = \dot{\theta}_q = 0 \qquad [1.115a]$$

$$\dot{\rho}_d = \dot{\rho}_q = \dot{\theta} \qquad [1.115b]$$

de sorte que l'expression de leurs tensions $u_d$ et $u_q$ comporte un terme de glissement. On peut montrer, en partant de l'équation générale [1.21], que les expressions obtenues pour les tensions $u_d$ et $u_q$ en tenant compte de ce terme sont identiques aux expressions habituellement obtenues en utilisant la loi de transformation des variables, soit :

$$u_d = R\,i_d + \frac{d\,\psi_d}{dt} - \dot{\theta}\,\psi_q \qquad [1.116a]$$

$$u_q = R\,i_q + \frac{d\,\psi_q}{dt} + \dot{\theta}\,\psi_d \qquad [1.116b]$$

où les termes en $\dot{\theta}$ ne sont autres que les termes de glissement.

Or, en termes des circuits $d$ et $q$, la co-énergie $w_{cm}$ est une fonction de deux variables seulement, soient $i_d$ et $i_q$. La connaissance de cette fonction suffit à déterminer l'expression des flux par :

$$\psi_d = \frac{\partial\, w_{cm}}{\partial\, i_d} \qquad [1.117a]$$

$$\psi_q = \frac{\partial\, w_{cm}}{\partial\, i_q} \qquad [1.117b]$$

Ces simplifications permettent de prendre en compte la saturation magnétique tout en gardant un modèle assez simple pour être utilisé en temps réel.

## 1.6. Bibliographie

[BEG 22] BÉGHIN M., Etude théorique des compas Anschutz et Sperry, Thèse 1727, Paris, 1922.

[FEY 64] FEYNMANN R., *The Feynmann lectures on physics*, Addison-Wesley, Londres, 1964.

[MAX 73] MAXWELL J.C., Traité d'électricité et de magnétisme, 1873.

[POI 07] POINCARÉ H., « Etude du récepteur téléphonique », L'éclairage électrique, février-mars 1907.

[VON 68] VON DER EMBSE, « A new theory of nonlinear commutator machine », *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems (PAS)*, septembre 1968.

[MAT 02] MATAGNE E. et al., Applications de la théorie des circuits glissants et non linéiques, http://www.lei.ucl.ac.be/~matagne/GLISSANT/INDEX.HTM.

Chapitre 2

# Modèles dynamiques des systèmes en génie électrique

## 2.1. Introduction

Tout concepteur moderne de systèmes est amené à « modéliser » son système. Mais le mot « modélisation » n'a pas le même sens pour le concepteur physique d'un composant et pour le concepteur d'un système automatisé. On peut rêver au « logiciel universel » qui traiterait tous les systèmes électriques, incluant aussi bien l'étude par éléments finis de la saturation des pièces en fer que l'étude du comportement dynamique de l'onduleur pendant un démarrage. Il serait d'une lourdeur telle qu'il serait, en pratique, inutilisable. C'est pourquoi on utilise des modèles et des logiciels spécialisés qui répondent aux problèmes spécifiques que se pose le concepteur.

Dans le cadre des systèmes dynamiques électriques, ce chapitre a pour but de présenter différents types de modèles nécessaires pour la conception et l'analyse des commandes des machines à courant alternatif (le chapitre 1 du deuxième volume traite du moteur à courant continu). Notre but n'est pas de faire une étude exhaustive, mais de présenter sur des exemples classiques les notions de modèle de synthèse, de modèle d'analyse et de modèle de simulation.

La conception des circuits de réglage d'un système actionneur électrique suit les mêmes démarches et étapes que pour n'importe quel système d'automatique. Tout

---

Chapitre rédigé par Yvan BONNASSIEUX, Edouard LAROCHE, Mohamed Fouad BENKHORIS et Jean-Paul LOUIS.

d'abord la *configuration et le dimensionnement des circuits de réglage*. On choisit ici la structure de ou des boucles de régulation. Ensuite, afin de quantifier le résultat du système régulé obtenu, il est nécessaire de faire une *analyse de la robustesse* en stabilité et en performance et une *simulation numérique* la plus réaliste possible du système actionneur électrique.

Ces différentes étapes nécessitent des *modélisations spécifiques* de la machine. C'est-à-dire une description mathématique du système à l'aide d'équations différentielles ou de fonctions de transferts, mettant en évidence le comportement statiques et dynamique ainsi que d'éventuels phénomènes non linéaires. Le modèle choisi se doit d'être pertinent en fonction des contraintes appliquées au système et des objectifs assignés. Cela pose le problème du degré de raffinement nécessaire, donc du choix du modèle.

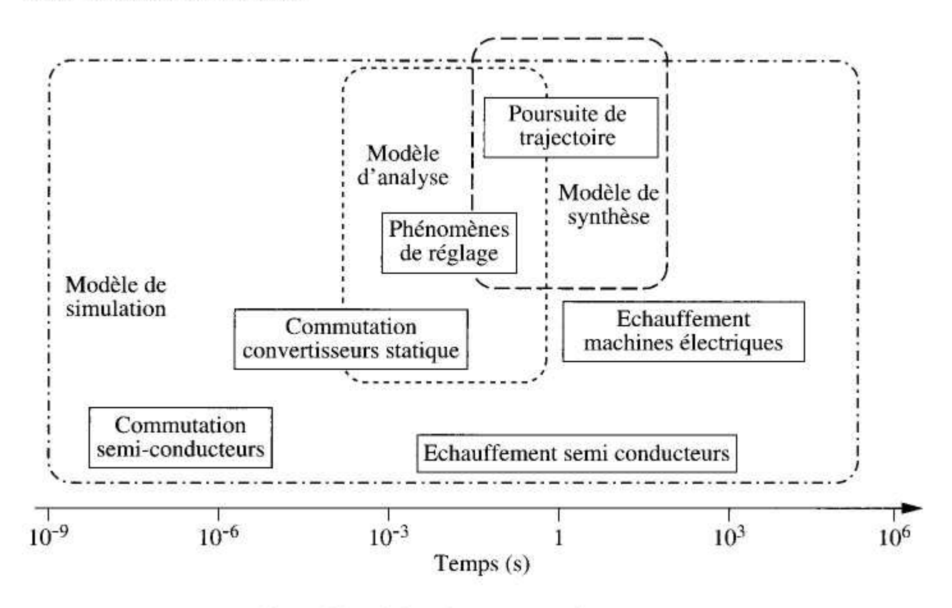



**Figure 2.1.** *Phénomènes temporels transitoires*

Ainsi, afin de développer et de valider une loi de commande, trois types de modèles sont utilisés.

Le *modèle de synthèse* doit permet la conception de lois de commande facilement implantable. Il doit donc ne tenir compte que des phénomènes dominants à la vue du cahier de charge de la régulation (bande passante, nombres d'entrées/sorties…). Les critères primordiaux à la définition de ce modèle de synthèse sont donc sa simplicité (ordre réduit, linéarité), sa propension à permettre la mise en

œuvre des algorithmes de synthèse de l'automatique (représentation d'état, fonctions de transfert). Classiquement d'un point de vue temporel (figure 2.1) cette famille de modèles tient compte uniquement des phénomènes de réglage et de la poursuite de trajectoire. La section 2.2 présente l'exemple d'une modélisation en flux rotorique orienté de la machine asynchrone.

Un *modèle d'analyse* destiné à valider la loi de commande par une technique particulière (lieu des pôles multimodèles, μ-analyse) est souvent pratique afin d'obtenir une première validation en termes de robustesse de la loi de commande. Il prend en compte, autant que possible, les phénomènes négligés dans le modèle de synthèse (non linéarités, dynamiques négligées, variation des paramètres...). Au niveau temporel (figure 2.1) cela nécessite une certaine prise en compte de la commutation des convertisseurs statiques. Cependant, les méthodes d'analyse ne permettent généralement pas, de tenir compte de l'ensemble des imperfections. En outre il est, là aussi, nécessaire d'obtenir un modèle en adéquation avec les différents algorithmes d'analyse (représentation d'état). Nous donnerons deux exemples. Nous présenterons tout d'abord, dans le paragraphe 2.3.1, une illustration dans le cadre de la machine asynchrone d'une approche multimodèle (plus adapté aux variations paramétriques). Puis dans le paragraphe 2.3.2, une étude de la robustesse en termes d'incertitudes fréquentielles sur la machine synchrone.

Le *modèle de simulation*, au contraire, n'a pas de contrainte en termes de représentation mathématique. Il se doit d'être le plus complet possible et de tenir compte autant que faire se peut (contraintes de complexité et de temps de calcul) de tous les phénomènes négligés par le modèle de synthèse. Ainsi, dans le cadre des systèmes du génie électrique, la simulation se devra, suivant la problématique étudiée, de formaliser des phénomènes ultrarapides comme la commutation des semi-conducteurs de puissance (10 ns-1 μs) ou l'échauffements des machines électriques qui peuvent se chiffrer en heures (figure 2.1). Le paragraphe 2.4 introduit la problématique de la modélisation en vue de la simulation des machines électriques alimentées par des convertisseurs statiques.

## 2.2. Modèle de synthèse : modèle direct et modèle inverse d'une machine asynchrone (flux rotorique orienté)

### 2.2.1. *Introduction : modèle inverse/modèle direct*

Dans de nombreuses applications, la machine asynchrone est pilotée en vitesse (« variateur asynchrone »), mais la détermination de la commande en vitesse proprement dite relève plutôt de problèmes purement « automatiques », car il faut prendre en considération les particularités de la charge mécanique (inertie et frottement souvent variables, présence possible de jeux, existence fréquente

de modes oscillatoires). Nous nous limitons ici à un point de vue purement « électrotechnique » : nous cherchons simplement à imposer l'amplitude du flux, pour maintenir l'état magnétique constant, ainsi que le couple.

Dans le cas du contrôle vectoriel classique, le problème s'énonce donc ainsi : quelle tension triphasée statorique, $V_{abc}$, faut-il imposer, à l'aide de l'onduleur, pour que le module du flux rotorique soit régulée à une valeur constante $\psi_{rref}$ et pour que le couple C soit asservi à une valeur imposée $C_{ref}$, (valeur supposée définie par une commande de niveau supérieur, par exemple un régulateur de vitesse). Les références de couple et de flux sont données, et nous cherchons à déterminer un « modèle inverse » ; la figure 2.2 donne le schéma fonctionnel qui définit les entrées et les sorties. Nous supposerons que les courants statoriques $i_{abc}$, la vitesse $\Omega$ et la position $\theta$ sont mesurables instantanément et sans erreur.

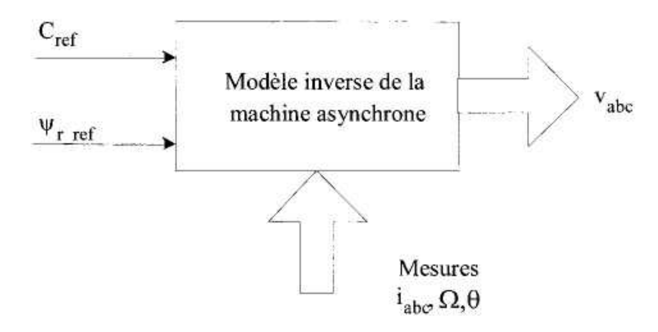



**Figure 2.2.** *Schéma fonctionnel du « modèle inverse » de la machine asynchrone*

### 2.2.2. *Modélisation de Park de la machine asynchrone*

#### 2.2.2.1. *Expression factorisée et projetée des flux et du couple*

Nous utiliserons ici le modèle classiquement utilisé pour la commande des machines asynchrones. Il suppose que la machine asynchrone est constituée d'un stator avec trois phases équilibrées, indicées *a*, *b* et *c*. Le rotor est également composé de trois phases équilibrées, indicées *A*, *B* et *C*. On fait l'hypothèse de linéarité (non-saturation des matériaux magnétiques) et l'on peut alors écrire des relations linéaires entre les flux embrassés par les bobinages (les phases) et les courants. Les vecteurs relatifs aux grandeurs statoriques sont notés $x_{abc}$, et les vecteurs relatifs aux grandeurs rotoriques sont notés $x_{ABC}$.

Le vecteur des flux statoriques est noté $\Psi_{abc}$, le vecteur des flux rotoriques est noté $\Psi_{ABC}$. Le vecteur des courants statoriques est noté $i_{abc}$, le vecteur des flux rotoriques est noté $i_{ABC}$. Les relations entre ces grandeurs sont de la forme :

$$\begin{aligned}\psi_{abc} &= L_s.i_{abc} + M_{sr}.i_{ABC} \\ \psi_{ABC} &= M_{rs}.i_{abc} + L_r.i_{ABC}\end{aligned} \qquad [2.1]$$

Nous considérerons en outre des machines dites « bien construites » (et non défectueuses). Des considérations physiques sur ces machines, en particulier sur leurs symétries, sur la réciprocité des chemins magnétiques et sur la distribution des champs magnétiques dans l'entrefer de la machine (hypothèse dite « du premier harmonique ») imposent que toutes les matrices des inductances sont « circulantes ». Les matrices $L_s$ et $L_r$ sont, en outre, symétriques et l'on a la relation : $M_{rs} = M_{sr}'$.

La conversion d'énergie électromécanique, basée sur des considérations de conservation d'énergie (premier principe de la thermodynamique) donne l'expression suivante pour le couple électromagnétique développé sur l'axe de la machine :

$$C = \frac{\partial W'_{em}}{\partial \theta} = \frac{1}{2}.i_{abc}{}^t.\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial M_{sr}}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial M_{rs}}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix}.i_{ABC} \qquad [2.2]$$

où $W'_{em}$ est la co-énergie magnétique de la machine :

$$W'_{em} = \frac{1}{2}.i_{abc}{}^t.\begin{bmatrix} L_s & M_{sr} \\ M_{rs} & L_r \end{bmatrix}.i_{ABC} \qquad [2.3]$$

Quand ils s'intéressent aux régimes transitoires, les électrotechniciens utilisent classiquement des « transformations », qui sont en fait, des changements de repère. Cela se justifie par le désir de simplifier les calculs nécessités par la résolution des équations différentielles non linéaires. Le chapitre 4 a permis de définir les « sous-matrices » de Concordia, $T_{31}$ et $T_{32}$. Ceci nous permet de rappeler directement l'expression du couple et des flux statorique et rotorique :

$$C = p.M.i_{abc}{}^t.T_{32}.P(p.\theta + \frac{\pi}{2}).T_{32}{}^t.i_{ABC} \qquad [2.4]$$

$$\begin{aligned}\psi_{abc} &= L_s.i_{abc} + M.T_{32}.P(p.\theta).T_{32}{}^t.i_{ABC} \\ \psi_{ABC} &= M.T_{32}.P(-p.\theta).T_{32}{}^t.i_{abc} + L_r.i_{ABC}\end{aligned} \qquad [2.5]$$

On observe dans les termes de couplage entre le stator et le rotor des équations précédentes, que ce ne sont pas des « courants triphasés » (vecteur à trois composantes), mais des « courants diphasés » (vecteurs à deux composantes) qui interviennent

puisque l'on écrit toujours des expressions comme $T_{32}{}^{t}.i_{abc}$ et $T_{32}{}^{t}.i_{ABC}$. Ainsi, les variables à contrôler pour imposer le couple $C$ ou l'amplitude du flux rotorique ne sont pas de dimension 3, mais de dimension 2.

En supposant que les composantes homopolaires sont nulles[1], on utilise la transformation « triphasé-diphasé » de Concordia[2] appliquée aux courants statoriques et rotoriques. L'expression du couple [2.4] peut s'écrire sous la forme suivante :

$$C = p.M.i_{\alpha\beta s}{}^{t}.P(p.\theta + \frac{\pi}{2}).i_{\alpha\beta r} \qquad [2.6]$$

Dans la suite, nous utiliserons ces notations en les indiçant $s$ ou $r$, suivant qu'il s'agit des paramètres du stator ou du rotor. Les expressions des flux définies dans la formule [2.5] mettent aussi en évidence que les termes de mutuelles[3] contiennent des « courants diphasés » :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \end{pmatrix} &= L_1.\begin{pmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{pmatrix} + M.P(p.\theta).\begin{pmatrix} i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{pmatrix} &= M.P(-p.\theta).\begin{pmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{pmatrix} + L_2.\begin{pmatrix} i_{\alpha r} \\ i_{\beta r} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad [2.7]$$

Nous appliquons aussi la transformation de Concordia aux expressions des tensions rotoriques et statoriques triphasées (les composantes homopolaires seront classiquement considérées comme nulles) :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (v_{abc}) = T_{32}.(v_{\alpha\beta s}) \\ (v_{\alpha\beta s}) = R_s.(i_{\alpha\beta s}) + \dfrac{d}{dt}(\Psi_{\alpha\beta s}) \end{cases} \\ &\begin{cases} (v_{ABC}) = T_{32}.(v_{\alpha\beta r}) \\ (v_{\alpha\beta r}) = R_r.(i_{\alpha\beta r}) + \dfrac{d}{dt}(\Psi_{\alpha\beta r}) \end{cases} \end{aligned} \qquad [2.8]$$

1. Dans la majorité des montages expérimentaux, la connexion entre la source (l'onduleur) et la machine supprime la composante homopolaire (il suffit pour cela que la loi au nœud impose : $i_a + i_b + i_c = 0$ et toutes les grandeurs homopolaires sont nulles).

2. Voir chapitre 1.

3. $L_1 = L_s - M_s$, inductance cyclique statorique : $L_2 = L_r - M_r$, inductance cyclique rotorique.

2.2.2.2. *Changement de repère par rotation : transformation de Park*

La rotation de Park est une rotation des repères dont les angles de rotation sont *a priori* arbitraires. Nous notons $\xi_s$ l'angle de rotation du repère statorique et $\xi_r$ l'angle de rotation du repère rotorique.

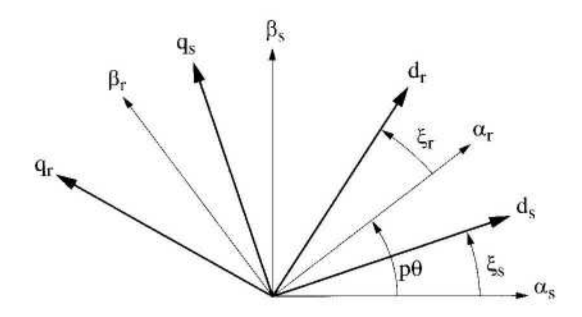



**Figure 2.3.** *Changement de repères statorique et rotorique*

Ceci permet de récrire les équations des flux statoriques et rotoriques :

$$\begin{cases} (\Psi_{\alpha\beta s}) = P(\xi_s).(\Psi_{dqs}) \\ (\Psi_{dqs}) = L_1.(i_{dqs}) + M.P(p\theta + \xi_r - \xi_s).(i_{dqr}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\Psi_{\alpha\beta r}) = P(\xi_r).(\Psi_{dqr}) \\ (\Psi_{dqr}) = M.P(-p\theta - \xi_r + \xi_s).(i_{dqs}) + L_r.(i_{dqr}) \end{cases} \quad [2.9]$$

Le choix des angles $\xi_s$ et $\xi_r$ est *a priori* totalement arbitraire. Cependant, en examinant la relation [2.9], nous voyons apparaître la condition de simplification suivante :

$$\xi_s = p.\theta + \xi_r \quad [2.10]$$

qui signifie que les repères d'axe statorique ($d_s$, $q_s$) et rotorique ($d_r$, $q_r$) sont confondus ($d$, $q$). La dérivation de l'équation précédente donne :

$$\frac{d\xi_r}{dt} = \frac{d\xi_s}{dt} - p\Omega \quad [2.11]$$

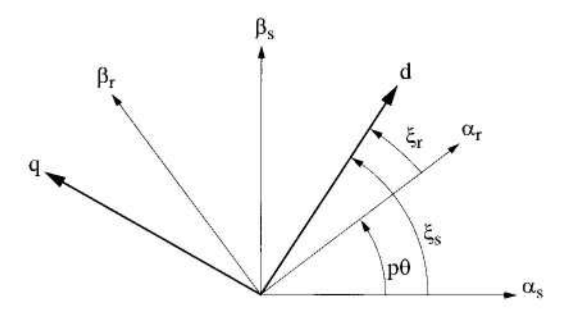



**Figure 2.4.** *Changement de repère de la transformation de Park*

La transformation de Park de la machine asynchrone diphasée $(\alpha,\beta)$ au sens de Concordia s'exprime donc par les équations des flux suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{dqs}\right) &= L_1.\left(i_{dqs}\right) + M.\left(i_{dqr}\right) \\ \left(\Psi_{dqr}\right) &= M.\left(i_{dqs}\right) + L_2.\left(i_{dqr}\right) \end{aligned} \qquad [2.12]$$

Nous appliquons aussi la transformation de Park aux tensions statoriques et rotoriques :

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s.i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \dfrac{d\xi_s}{dt}.\psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s.i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \dfrac{d\xi_s}{dt}.\psi_{ds} \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_{dr} = R_r.i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - \dfrac{d\xi_r}{dt}.\psi_{qr} \\ v_{qr} = R_r.i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + \dfrac{d\xi_r}{dt}.\psi_{dr} \end{cases} \qquad [2.13]$$

2.2.2.3. *Représentation d'état continu*

Il est classique en électrotechnique d'utiliser un changement de variables. Il s'agit de remplacer une grandeur magnétique, le flux, certainement non mesurable, par une grandeur homogène à un courant, ce qui simplifiera certaines manipulations ultérieures. On définit ainsi un « courant magnétisant $i_{\mu r}$ relatif au flux rotorique » :

$$\begin{pmatrix} \psi_{dr} \\ \psi_{qr} \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} M.i_{\mu_{dqr}} = M.\begin{pmatrix} i_{\mu_{dr}} \\ i_{\mu_{qr}} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \end{pmatrix} + L_2.\begin{pmatrix} i_{dr} \\ i_{qr} \end{pmatrix} \qquad [2.14]$$

Nous introduisons en outre le coefficient de dispersion magnétique $\sigma$ :

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1.L_2} \qquad [2.15]$$

et les constantes de temps statorique et rotorique :

$$T_1 = \frac{L_1}{R_r} \quad T_2 = \frac{L_2}{R_r} \qquad [2.16]$$

Les équations de flux [2.12] s'écrivent donc pour la partie statorique :

$$\psi_{dqs} = L_2.\sigma.i_{dqs} + L_2.(1-\sigma).i_{\mu_{dqr}} \qquad [2.17]$$

Nous définissons les pulsations statorique et rotorique :

$$\omega_s = \frac{d\xi_s}{dt} \text{ et } \omega_r = \frac{d\xi_r}{dt} \qquad [2.18]$$

A partir des équations aux tensions [2.13] et des équations aux flux [2.14] et [2.17], on peut exprimer les équations différentielles du premier ordre des courants :

$$\frac{d}{dt}\left(i_{dqs}\right) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{T_1.\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}.\frac{1}{T_2} & -\omega_s \\ \omega_r & \frac{1}{T_1.\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}.\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}.\left(i_{dqs}\right)$$
$$+ \frac{1-\sigma}{\sigma}.\begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & p.\Omega \\ -p.\Omega & \frac{1}{T_2} \end{pmatrix}.\left(i_{\mu_{dqr}}\right) + \frac{1}{L_1.\sigma}.\left(v_{dqs}\right) \qquad [2.19]$$

$$\frac{d}{dt}\left(i_{\mu_{dqr}}\right) = \frac{1}{T_2}.\left(i_{dqs}\right) - \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & -\omega_r \\ \omega_r & \frac{1}{T_2} \end{pmatrix}.\left(i_{\mu_{dqr}}\right) \qquad [2.20]$$

Les équations [2.19] et [2.20] donnent la représentation d'état de la machine asynchrone dans le plan de Park. Il est à noter que la condition sur les angles [2.10] laisse un degré de liberté concernant le choix de l'orientation du repère de projection.

Partant de l'équation [2.6], le couple instantané s'écrit par la relation :

$$C = p.L_1.(1-\sigma).\left(i_{\mu dr}.i_{q_s} - i_{\mu qr}.i_{ds}\right) \quad [2.21]$$

### 2.2.3. *Modèle de la commande : flux rotorique orienté*

Partant des équations d'état précédentes, plusieurs stratégies de commande sont possibles en fonction du choix de l'orientation du repère de projection. Classiquement, une projection sur le repère statorique est utilisée dans le cadre des commandes directes du couple (DTC[4]) [BUJ 97, CHA 95, TAK 86] ; le repère du flux rotorique est le référentiel de la commande vectorielle à flux rotorique orienté (FOC[5]) [LEO 90].

*Equation de la commande*

L'expression précédente du couple électromagnétique instantané [2.21] résulte d'une différence de produits de deux grandeurs scalaires. En imposant le flux rotorique sur l'axe $q$ nul, l'axe $d$ défini sur la figure 2.4 est alors aligné sur le vecteur flux rotorique :

$$\psi_{q_r} = 0 \quad \psi_r = \psi_{d_r} \text{ et } i_{\mu r} = i_{\mu dr} \quad [2.22]$$

L'expression du couple [2.21] s' écrit à partir d'une seule grandeur de réglage $i_{qs}$ tout en maintenant l'amplitude du flux (le courant magnétisant) $i_{\mu r}$ à la valeur désirée. Notons la similitude de cette expression avec celle obtenue pour une machine à courant continu à excitation séparée :

$$C = p.L_1.(1-\sigma).i_{\mu r}.i_{q_s} \quad [2.23]$$

Nous posons deux paramètres physiquement importants, l'inductance totale de fuites ramenée au stator $N_1$ et l'inductance magnétisante $L_m$, que l'on peut définir à l'aide du coefficient de dispersion $\sigma$ :

4. *Direct Torque Control.*
5. *Flux Oriented Control.*

$$N_1 = \sigma.L_1 = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) \text{ et } L_m = (1-\sigma).L_1 = \frac{M^2}{L_2} \qquad [2.24]$$

En appliquant les conditions du flux rotorique orienté aux équations de tension [2.13], nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
V_{ds} &= R_s.i_{ds} + N_1.\frac{di_{ds}}{dt} - \omega_s.N_1.i_{qs} + L_m\frac{di_{\mu r}}{dt} \\
V_{qs} &= R_s.i_{qs} + N_1.\frac{di_{qs}}{dt} + \omega_s.N_1.i_{ds} + \omega_s.L_m i_{\mu r} \\
0 &= \frac{1}{T_2}.(i_{\mu r} - i_{ds}) + \frac{d}{dt}(i_{\mu r}) \\
0 &= -\frac{1}{T_1}.i_{qs} + \omega_r.i_{\mu r}
\end{aligned} \qquad [2.25]$$

La troisième équation de [2.25], permet de définir un observateur de flux minimal qui utilise les transformées de Park avec un angle de référence estimé $\hat{\xi}_s$ (« estimé », puisque donné par les calculs suivants). Il s'exprime dans le domaine de Laplace par :

$$\hat{I}_{\mu r}(s) = \frac{1}{T_2.s+1}.\hat{I}_{ds}(s) \qquad [2.26]$$

La quatrième équation de [2.25], donne l'expression de la pulsation rotorique. Elle permet d'obtenir la forme dérivée de la loi de changement de repère :

$$\hat{\omega}_r = \frac{1}{T_2}.\frac{\hat{i}_{qs}}{\hat{i}_{\mu r}} \text{ puis } \hat{\omega}_s = \hat{\omega}_r + p.\Omega \qquad [2.27]$$

La transformation de Park nécessite la connaissance de l'angle statorique $\xi_s$. ce qui impose de connaître $\theta$, l'angle mécanique du rotor obtenu à partir d'une mesure par un codeur incrémental :

$$\hat{\xi}_s = \theta + \int \hat{\omega}_r.dt = \theta + \int \frac{1}{T_2}.\frac{\hat{i}_{qs}}{\hat{i}_{\mu r}}dt \qquad [2.28]$$

Les deux premières équations permettent de contrôler $i_{qs}$ et $i_{\mu r}$, c'est-à-dire de maîtriser le flux et le couple en agissant sur les commandes $v_{ds}$ et $v_{qs}$.

On réécrit ces équations différentielles sous forme détaillée, en faisant apparaître des fonctions appelées traditionnellement « forces contre-électromotrices » :

$$\begin{aligned} \hat{e}_d &= \hat{\omega}_s . N_1 . \hat{i}_{qs} + \frac{L_m}{T_2} . \hat{i}_{\mu r} \\ \hat{e}_q &= -\hat{\omega}_s . (N_1 . \hat{i}_{ds} + L_m . \hat{i}_{\mu r}) \end{aligned} \qquad [2.29]$$

Ce qui permet d'écrire les équations différentielles des courants de Park statoriques sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{di_{ds}}{dt} &= -\frac{1}{N_1}(R_s + \frac{L_m}{T_2}).\hat{i}_{ds} + \frac{1}{N_1}(v_{ds} + \hat{e}_d) \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= -\frac{R_s}{N_1}.\hat{i}_{qs} + \frac{1}{N_1}.(v_{qs} - \hat{e}_q) \end{aligned} \qquad [2.30]$$

### 2.2.4. *Modèle dynamique de la machine asynchrone*

En conclusion sur cette présentation de commande, il est intéressant de se poser la question du choix ou plutôt des choix du repère de projection. Notons ici qu'il est simplement question d'un choix de convenance pour la simulation ou la commande, mais que les calculs doivent donner les mêmes résultats quel que soit le repère choisi.

En effet, comme le montre la figure 2.5, la conception d'un modèle dynamique de la machine asynchrone ne nécessite pas de spécifier une projection unique, et l'on peut (si le concepteur le désire) avoir recours à trois repères différents :

– le repère de commande (repère où est synthétisé la loi de commande) de pulsation $\omega_1$ et dans le repère défini par l'angle $\omega_1 = d\xi_1/dt$ ;

– le repère de simulation de pulsation $\omega_s$ et dans le repère défini par l'angle $\omega_s = d\xi_s/dt$ ;

– le repère de visualisation (« affichage ») de pulsation $\omega_{aff}$ et dans le repère défini par l'angle $\omega_{aff} = d\xi_{aff}/dt$.

Ainsi, par exemple, dans le cas d'une commande de type FOC, on choisira un repère de projection lié au flux rotorique $\omega_1 = p\theta$ (voir l'équation [2.27]) ; les variables d'état pour ce modèle seront les courants statoriques et le courant magnétisant relatifs au repère du flux rotorique.

Ce repère est peu propice à la simulation, puisque que l'on effectue une division par le module du flux (voir l'équation [2.27]) qui peut être nul au démarrage des calculs. Si l'on veut pouvoir traiter avec finesse la simulation des tensions discontinues générées par l'onduleur, nous choisirons préférentiellement pour la simulation une projection dans le repère statorique ($\omega_s = 0$), les variables d'état étant les flux statoriques et rotoriques ; les équations d'état seront déduites des modèles physiques [2.13], [2.14] et [2.12], les tensions d'alimentation étant simplement les transformées de Concordia des tensions triphasées qui sont bien connues, surtout si l'on adopte une modulation vectorielle (voir chapitre 4, second volume). L'affichage pourra se faire dans un repère lié au champ tournant, si l'on veut observer des grandeurs de type continu en régime permanent, ce qui est bien adapté à l'évaluation des performances.

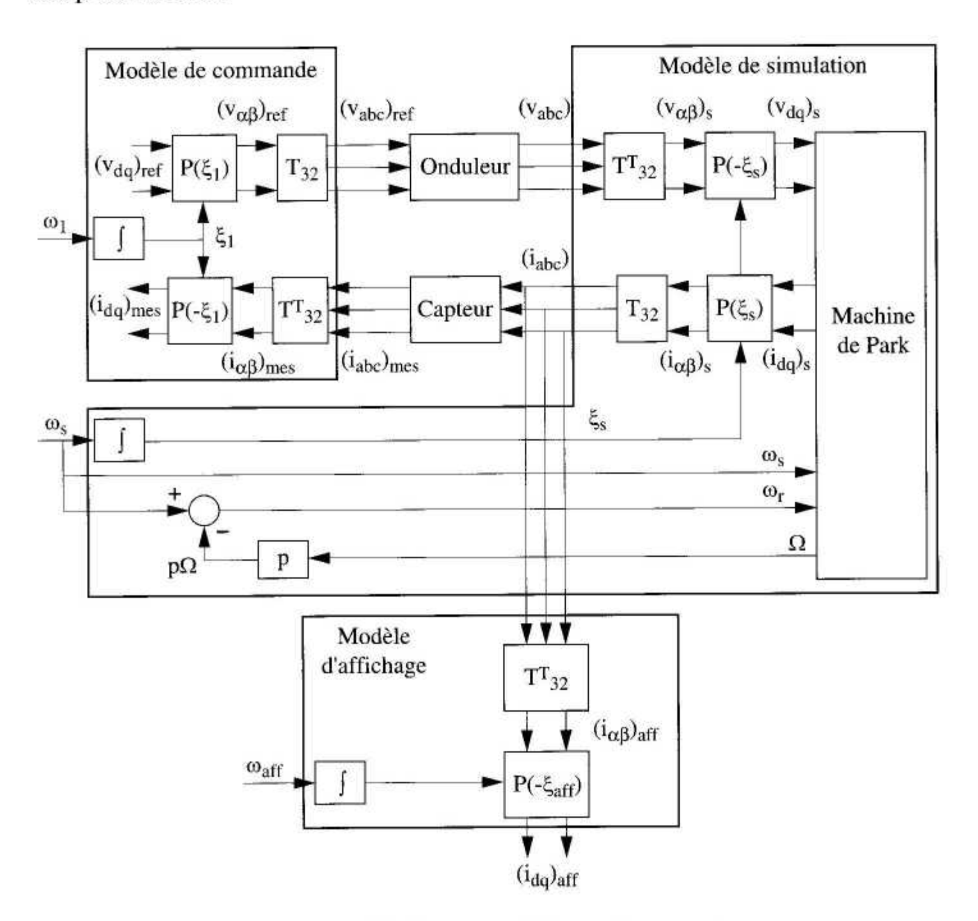



**Figure 2.5.** *Modèle dynamique de la machine asynchrone*

## 2.3. Modèles d'analyses

### 2.3.1. *Introduction*

Les algorithmes de commande et de diagnostic des machines électriques sont généralement établis d'après un modèle simplifié ne tenant compte que des phénomènes physiques élémentaires. Les hypothèses qui sont faites dans de tels modèles peuvent être classées en différents groupes :

– les approximations structurelles concernant le modèle même de la machine ; c'est le cas de la saturation magnétique et des pertes fer ;

– les erreurs paramétriques dues aux incertitudes d'estimation et/ou aux variations des paramètres lors du fonctionnement ;

– les approximations concernant l'environnement de la machine : effets de l'onduleur piloté en MLI et les incertitudes sur la charge mécanique.

Dans l'étude de la robustesse de l'algorithme envisagé, une approche pourrait consister à tester l'algorithme avec un modèle de simulation de la machine aussi fin que possible faisant le moins d'approximations possible. Cependant, cette approche directe n'est pas recommandable pour différentes raisons. Tout d'abord parce qu'un tel modèle, s'il existe, est lourd à établir et à simuler ; cette approche est donc pénalisante en termes de temps de calcul. Ensuite, les paramètres d'un tel modèle sont de toute façon connus avec une certaine précision et sont amenés à varier au cours du fonctionnement. Ainsi, il reste nécessaire de simuler le modèle pour différentes valeurs des paramètres.

Face à ce problème, plusieurs approches sont possibles. On considèrera ici plus particulièrement deux approches permettant de concevoir des modèles d'analyses performants :

– une première approche consiste à travailler sur un ensemble de modèles simples dans lesquels on ne fait intervenir qu'un seul phénomène négligé dans le modèle de synthèse. On la qualifie de « multimodèle ». La validité de l'approche, c'est-à-dire la question de savoir si l'algorithme peut être validé à partir des simulations des différents modèles, repose sur une hypothèse de découplage. Si les phénomènes sont indépendants les uns des autres, alors ce sera bien le cas. Nous présenterons, dans le paragraphe 2.3.2, un exemple de cette approche appliquée au cas de la machine asynchrone ;

– une approche fréquentielle qui tend à borner les incertitudes paramétriques par des fonctions de transferts. Ce formalisme, dit « système augmenté », permet la mise en œuvre de la « $\mu$-analyse ». La méthode de la « valeur singulière structurée » s'est imposée comme un outil général d'analyse systématique des propriétés de robustesse d'un système asservi. Nous présenterons, dans le paragraphe 2.3.3, un exemple de cette approche appliquée au cas de la machine synchrone.

### 2.3.2. *Approche multimodèle : cas de la machine asynchrone*

Dans ce paragraphe, nous nous limitons à l'étude de quelques modèles tenant comptes d'erreurs structurelles. Nous traiterons le cas de la saturation magnétique et des pertes fer.

#### 2.3.2.1. *Modèles tenant compte de la saturation magnétique*

##### 2.3.2.1.1. Modèle physique

La saturation magnétique correspond à une diminution de la perméabilité des parties magnétiques. Elle concerne en premier lieu le flux principal dans les dents et la culasse. En modélisant la saturation comme une augmentation de l'entrefer et en tenant compte d'un harmonique d'espace de cet entrefer, on peut montrer que le modèle classique reste valable moyennant un aménagement consistant à choisir l'inductance magnétisante comme une fonction de l'état magnétique de la machine [LEM 99, MOR 92]. Les inductances cycliques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} L_s = N_s + L_m\left(X_m\right) \\ M = m.L_m\left(X_m\right) \\ L_r = N_r + m^2.L_m\left(X_m\right) \end{cases} \quad [2.31]$$

où $N_s$ et $N_r$ sont les inductances des fuites supposées non saturables ; $L_m$ est appelé inductance magnétisante et dépend de la variable de saturation $X_m$ qui reste à déterminer ; $m$ est le rapport de transformation entre le stator et le rotor. Les flux vus par les enroulements du stator et du rotor s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \underline{\varphi_s} = N_s.\underline{i_s} + \underline{\varphi_m} \\ \underline{\varphi_r} = N_r.\underline{i_r} + m.\underline{\varphi_m} \end{cases} \quad [2.32]$$

où $\underline{\varphi_m} = L_m\left(X_m\right).\left(\underline{i}_s + m.\underline{i}_r\right)$ est le vecteur du flux magnétisant vu du stator. Notons $i_m$ le courant magnétisant :

$$\underline{i_m} = \underline{i_s} + m.\underline{i_r} \quad [2.33]$$

On peut choisir comme variable de saturation l'amplitude du courant magnétisant ($X_m = i_m$) ou l'amplitude du flux magnétisant ($X_m = \varphi_m$). En intégrant les équations aux tensions dans un repère lié au stator :

$$\begin{cases} \underline{v_s} = R_s \cdot \underline{i_s} + \dfrac{d\underline{\varphi_s}}{dt} \\ 0 = R_r \cdot \underline{i_r} + \dfrac{d\underline{\varphi_r}}{dt} - j.p.\Omega.\underline{\varphi_r} \end{cases} \quad [2.34]$$

on aboutit au schéma équivalent de la figure 2.6.

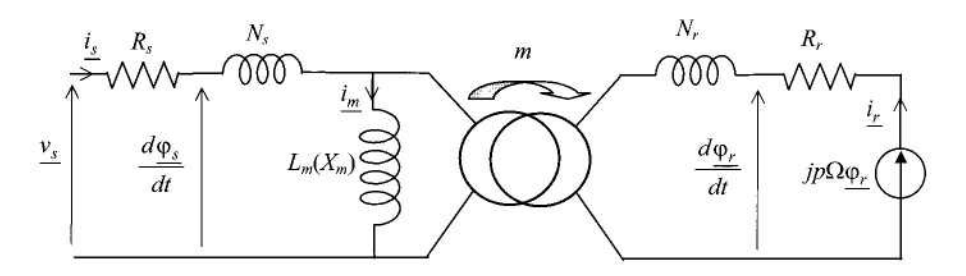



**Figure 2.6.** *Schéma équivalent de la machine asynchrone*

En ramenant la partie du rotor au stator, on obtient le modèle de la figure 2.7.

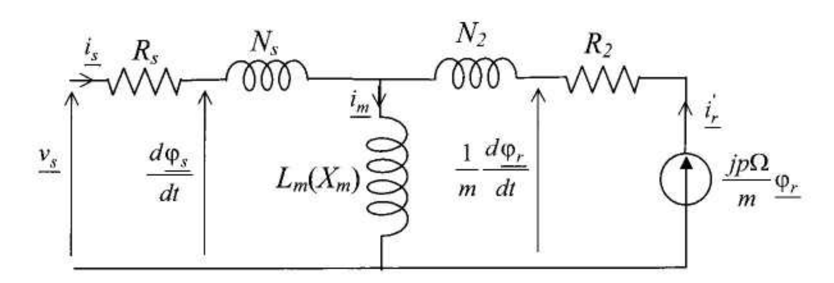



**Figure 2.7.** *Schéma équivalent de la machine asynchrone ramenée au stator*

Ici $R_2 = \dfrac{R_r}{m^2}$ et $N_2 = \dfrac{N_r}{m^2}$. Remarquons que ce modèle dépend de quatre paramètres et d'une fonction. Leur détermination est discutée au paragraphe 2.3.2.1.2.

2.3.2.1.2. Modèle d'état

Pour simuler ce modèle, une représentation d'état doit être obtenue reposant sur un jeu de variables d'état choisies parmi les courants et les flux. En observant les équations aux tensions [2.34], il apparaît que les variables d'état naturelles, c'est-à-dire celles qui apparaissent dans les équations physiques, sont les flux. Faire un

autre choix (comme dans [LAR 00a] où sont choisis le courant statorique et le flux magnétisant) oblige à des calculs supplémentaires peu utiles. La détermination des dérivées des flux nécessite de connaître les courants. Cela se fait simplement en inversant les expressions des flux, soit :

$$\begin{bmatrix} \underline{i_s} \\ \underline{i_r} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_s L_r - M^2} \begin{bmatrix} L_r & -M \\ -M & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varphi_s} \\ \underline{\varphi_r} \end{bmatrix} \quad [2.35]$$

Le courant statorique est ainsi calculé et peut être utilisé comme grandeur de sortie.

Pour le choix de la variable de saturation, on peut calculer $\varphi_m$ à partir de la première relation de [2.32] et $i_m$ à partir de [2.33]. L'expression du couple reste inchangée.

2.3.2.1.3. Modèle simplifié et estimation des paramètres

A l'instar des modèles non saturés, on peut faire l'hypothèse que les fuites sont totalisées au stator ou au rotor. Si l'on choisit de totaliser les fuites au rotor en imposant $N_s = 0$, le modèle ne dépend plus que de trois paramètres et d'une fonction. Dans [KAS 00] a été proposée une extension de la méthode classique d'identification des paramètres de la machine asynchrone par des essais en régime permanent sinusoïdal. $R_s$ peut être estimé en courant continu par une méthode volt-ampèremétrique. A vide, le courant au rotor est nul ; $L_m(X_s)$ peut alors être obtenu en faisant varier l'amplitude de la tension. Un essai supplémentaire à glissement nominal où à rotor bloqué permet de déterminer $N_2$ et $R_2$. Puisque le comportement du modèle est insensible au rapport de transformation, les paramètres initiaux du modèle peuvent être obtenus en imposant $m = 1$ (ou égal à n'importe quelle valeur arbitraire).

Plutôt que de relever les variations de $L_m$ en fonction de la saturation, on peut choisir une expression analytique paramétrée et estimer les paramètres de cette fonction simultanément aux autres paramètres. Afin de limiter le nombre de paramètres, on peut choisir une fonction simple de la forme :

$$L_m(X_m) = \frac{L_{m0}}{1 + A.X_m{}^n}$$

où $n$ est un entier qui peut être fixé ; ce modèle permet de n'introduire que deux paramètres à identifier. Dans [LAR 00a], on a observé que des valeurs de $n$ égal à 2 ou 4 dans le cas où $X_m = i_m$ et 4 ou 6 dans le cas où $X_m = \varphi_m$ rendent compte correctement de la saturation pour une machine de quelques kW. L'ensemble des six paramètres peut alors être identifié simultanément par une méthode d'erreur de sortie [WAL 94] à partir de mesures en régime permanent [LAR 02] ou dynamique [LAR 03].

Contrairement au cas du modèle linéaire (non saturé), l'approximation faite en totalisant les fuites au stator ou au rotor entraîne une erreur de modèle. Lorsque les fuites sont faibles, cette erreur de modélisation peut être considérée comme négligeable. Si besoin est, une étude plus poussée peut être faite pour valider cette hypothèse. On peut alors s'appuyer sur les études des erreurs d'estimation des paramètres [LAR 00b, LAR 02, LAR 03].

2.3.2.2. *Modèles tenant compte des pertes fer*

Il est classique de placer une résistance en parallèle sur l'inductance magnétisante pour tenir compte des pertes fer [LEV 96]. Cela permet de tenir compte parfaitement des courants de Foucault en régime permanent comme en régime dynamique. Pour les pertes par hystérésis, cette modélisation doit être vue comme une approximation qui ne sera précise qu'au régime pour lequel la résistance a été estimée. Cette résistance peut être ajoutée aux modèles à fuites totalisées au stator, au rotor et sur les modèles faisant la distinction entre fuites stator et rotor. Cependant, les variations de comportement changent peu d'un modèle à l'autre ; nous nous limitons donc ici au cas du modèle à fuites totalisées au rotor ; le modèle où les grandeurs sont ramenées au stator est représenté sur la figure 2.8.

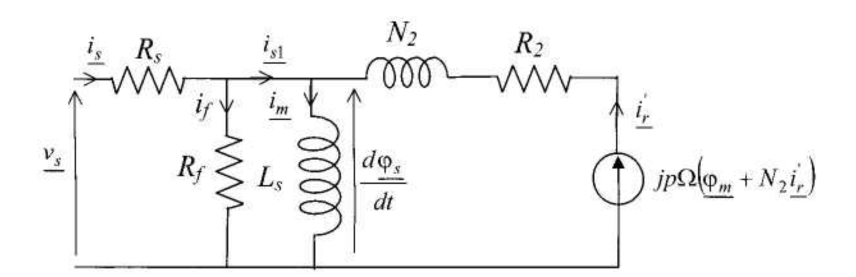



**Figure 2.8.** *Schéma équivalent avec pertes fer*

On peut vérifier que les équations aux flux [2.35] restent valables ; seules changent les expressions des flux où il faut désormais remplacer $\underline{i_s}$ par :

$$\underline{i_{s1}} = \underline{i_s} - \underline{i_f} \quad [2.36]$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \underline{\varphi_s} = L_s.\underline{i_{s1}} + M.\underline{i_r} \\ \underline{\varphi_r} = M.\underline{i_{s1}} + L_r.\underline{i_r} \end{cases} \quad [2.37]$$

Comme pour le modèle saturé, le modèle d'état est simplement donné par [2.32] en choisissant les flux comme variables d'état où $\underline{i_s}$ et $\underline{i_r}$ sont obtenus à partir des équations [2.36] et [2.37] avec :

$$\underline{i_f} = \frac{1}{R_f}\left(\underline{v_s} - R_s \underline{i_s}\right) \qquad [2.38]$$

L'expression du couple reste inchangée ; le cas échéant, on remplace $\underline{i_s}$ par $\underline{i_{s1}}$.

Les cinq paramètres de ce modèle peuvent être identifiés par une méthode ne nécessitant que des essais élémentaires. Alors que $R_s$ peut être obtenu en courant continu, $R_f$ et $L_s$ peuvent être estimés par un essai à vide. Il ne reste plus que $N_2$ et $R_2$ à estimer grâce à un essai à rotor bloqué ou à charge nominale.

Il est possible d'écrire les équations d'un modèle tenant compte à la fois de la saturation magnétique et des pertes fer. Cela se fait simplement en introduisant la saturation à partir d'un modèle à fuites totalisées au stator ou au rotor (figure 2.3) en écrivant que l'inductance magnétisante varie en fonction du niveau de saturation, comme au paragraphe 2.1.2.1. On obtient alors un modèle approché d'ordre 4. Si l'on souhaite tenir compte de la répartition des fuites entre stator et rotor en ajoutant la résistance des pertes fer à partir du modèle saturé de la figure 2.1, on obtient alors un modèle d'ordre 6 dont les paramètres sont, en pratique, non identifiables [LAR 02].

### 2.3.3. *Approche par la valeur singulière structurée : cas de la machine synchrone*

Initialement introduite par Doyle en 1982 [DOY 82], la théorie d'analyse des propriétés de robustesse des systèmes multivariables par la valeur singulière structurée s'est considérablement développée ces dernières années [PAC 88, THO 95]. Le propos de ce paragraphe est de définir une modélisation sous forme standard des principales incertitudes nuisibles à l'asservissement du système, puis de présenter succinctement la méthode de la μ-analyse.

#### 2.3.3.1. *Rappel sur la modélisation de la machine synchrone*

Nous nous attachons ici à une régulation en couple de l'association servomoteur synchrone alimenté par un onduleur fonctionnant en MLI[6]. La mise en équation du couple dans le plan de Park permet de mettre en exergue la dualité entre ce dernier et les courants de l'axe direct $i_d(t)$ et de l'axe en quadrature $i_q(t)$ :

---

6. Modulation de largeur des impulsions.

$$\Gamma(t) = p.\left[\left(L_d - L_q\right).i_d\left(t\right) + \Phi_f\right].i_q\left(t\right) \quad [2.39]$$

Cette même mise en équation nous pousse en outre à opter pour une stratégie bien classique pour notre régulation. Nous référant à la machine à courant continu, nous régulerons $i_d$ à zéro, de manière à avoir le couple directement proportionnel à $i_q$. Afin de nous placer dans le cadre classique de la commande en courant, nous optons ici pour une modélisation linéaire de notre système. Pour cela, nous considérons que la constante de temps mécanique est nettement plus importante que les constantes de temps électriques. La machine synchrone est ainsi modélisée pour ces boucles de courant dans le plan de Park par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{di_d}{dt} = -\dfrac{R_s}{L_q}.i_d + p.\dfrac{L_q}{L_d}.\Omega.i_q + \dfrac{v_d}{L_d} \\ \dfrac{di_q}{dt} = -\dfrac{R_s}{L_q}.i_q - p.\dfrac{L_d}{L_q}.\Omega.i_d - p.\dfrac{\Phi_r}{L_q}.\Omega + \dfrac{v_q}{L_q} \end{cases} \quad [2.40]$$

dont la forme d'état est donnée :

$$\frac{d}{dt}X = A.X + B.\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} + B_\Omega \quad [2.41]$$

$$Y = C.X$$

avec les matrices définies ci-dessous :

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_s}{L_d} & p.\dfrac{L_q}{L_d}.\Omega \\ -p.\dfrac{L_d}{L_q}.\Omega & -\dfrac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{L_q} \end{bmatrix} \quad B_\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ -p.\dfrac{\phi_f}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad [2.42]$$

Nous devrons tenir compte du retard d'une demi-période de hachage $T_h$ propre à la modélisation au sens des valeurs moyennes de l'onduleur ainsi que du bloqueur d'ordre zéro inhérent à la numérisation du correcteur utilisé.

2.3.3.2. *Incertitudes paramétriques*

2.3.3.2.1. Définition du modèle incertain

Les erreurs sur les paramètres du servomoteur synchrone peuvent êtres définies comme un intervalle de variation $\Delta_x$ autour d'une valeur nominale $X_0$ :

$$\begin{cases} \tilde{R}_s = R_{s_0} + \Delta R_s \\ \tilde{L}_d = L_{d_0} + \Delta L_d \\ \tilde{L}_q = L_{q_0} + \Delta L_q \end{cases} \qquad [2.43]$$

On obtient un système d'état incertain [2.44] qui prend en compte au niveau de la modélisation du moteur les erreurs paramétriques précédentes. Ces dernières ne modifient que les matrices $A$ et $B$ :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X = \tilde{A}.X + \tilde{B}.U \\ Y = I_{2x2}.X \end{cases} \text{avec } \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\tilde{R}_s}{\tilde{L}_d} & p.\dfrac{\tilde{L}_q}{\tilde{L}_d}.\Omega \\ -p.\dfrac{\tilde{L}_d}{\tilde{L}_q}.\Omega & -\dfrac{\tilde{R}_s}{\tilde{L}_q} \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\tilde{L}_d} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\tilde{L}_q} \end{bmatrix} \qquad [2.44]$$

Un développement au 1er ordre des matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, permet d'exprimer les erreurs de modèles liées aux variations de paramètres sous la forme d'une l'incertitude multiplicative en entrée. Nous rappelons sur la figure 2.9 la structure de cette incertitude.

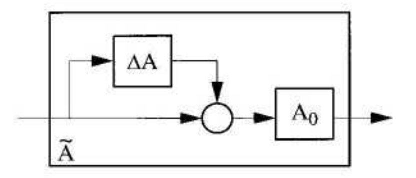



**Figure 2.9.** *Incertitude multiplicative en entrée sur la matrice d'état*

On obtient une expression des matrices d'état incertaines [2.45]. Elles se construisent sur les matrices nominales $A_0$ et $B_0$ ainsi que des matrices d'erreur $\Delta_A$ et $\Delta_B$ :

$$\tilde{A} = A_0.(I + \Delta A) \text{ et } \tilde{B} = B_0.(I + \Delta B) \qquad [2.45]$$

avec comme matrices nominales :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_{s_0}}{L_{d_0}} & p.\dfrac{L_{q_0}}{L_{d_0}}.\Omega \\ -p.\dfrac{L_{d_0}}{L_{q_0}}.\Omega & -\dfrac{R_{s_0}}{L_{q_0}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_{d_0}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{L_{q_0}} \end{bmatrix} \qquad [2.46]$$

et comme matrices d'erreur :

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \Delta_{A_{11}} & \Delta_{A_{12}} \\ \Delta_{A_{21}} & \Delta_{A_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dfrac{\Delta R_s}{R_{s_0}} - \dfrac{\Delta L_d}{L_{d_0}}) & (\dfrac{\Delta L_q}{L_{q_0}} - \dfrac{\Delta L_d}{L_{d_0}}) \\ (\dfrac{\Delta L_d}{L_{d_0}} - \dfrac{\Delta L_q}{L_{q_0}}) & (\dfrac{\Delta R_s}{R_{s_0}} - \dfrac{\Delta L_q}{L_{q_0}}) \end{bmatrix} \qquad [2.47]$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} \Delta_{B_{11}} & 0 \\ 0 & \Delta_{B_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta L_d}{L_{d_0}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\Delta L_q}{L_{q_0}} \end{bmatrix} \qquad [2.48]$$

2.3.3.2.2. La matrice d'état incertaine

Le but de cette étude est d'approximer au mieux les effets des erreurs paramétriques sur la matrice d'état. Afin de ne pas être trop conservatif sur la définition de nos critères de robustesse, nous travaillerons ici dans le cadre d'incertitudes structurées. On veut donc avoir, grâce à des fonctions de pondération $W_{Ag}$ et $W_{Ad}$ (réelle), la matrice d'état perturbée $\tilde{A}$ sous la forme :

$$\tilde{A} = A_0.(I_2 + \Delta A) = A_0.(I_2 + W_{Ag}.\delta_A.W_{Ad}) \qquad [2.49]$$

avec la perturbation $\delta_A$ bornée et diagonale (structuration), c'est-à-dire :

$$\delta_A = diag\left\{\delta_{A_1}, \delta_{A_2}, \delta_{A_3}, \delta_{A_4}\right\} \text{ avec } \left|\delta_{A_i}\right|_{(i,j)\in\{1,2,3,4\}} \leq 1 \qquad [2.50]$$

Pour cela, nous choisissons comme fonction de pondération les matrices de gains suivantes :

$$W_{Ag} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } W_{Ad} = \begin{bmatrix} \Delta_{A_{11}} & 0 \\ 0 & \Delta_{A_{12}} \\ \Delta_{A_{21}} & 0 \\ 0 & \Delta_{A_{22}} \end{bmatrix} \qquad [2.51]$$

La matrice $\delta_A$ définit une incertitude dite « structurée », c'est-à-dire qu'elle est diagonale. Nous devons choisir si les coefficients de cette matrice sont réels ou complexes. La figure 2.10 illustre la différence de représentation dans le plan complexe pour $\delta \in \Re$ et pour $\delta \in C$ :

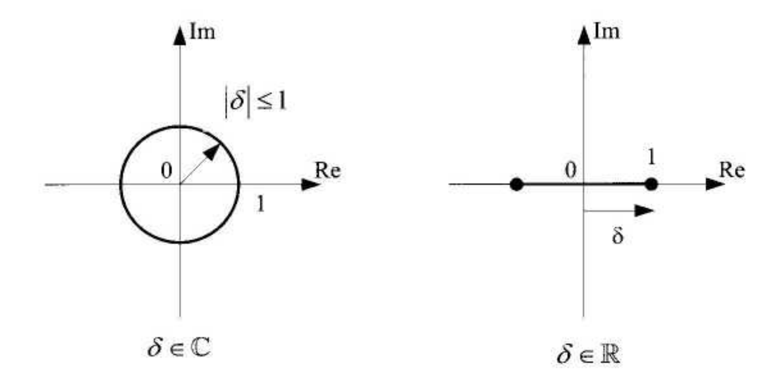



**Figure 2.10.** *Incertitude structurée complexe et réelle*

Les incertitudes que nous représentons par la matrice unitaire $\delta_A$ émanent de variations paramétriques réelles. Une incertitude complexe, définie par un disque, conduit à un plus grand pessimisme pour l'analyse comme pour une synthèse robuste [DOY 88, MAC 89]. Nous choisissons donc une matrice $\delta_A$ à coefficients réels :

$$\delta_A \in \mathbb{R}^{4x4} \qquad [2.52]$$

La matrice de pondération $W_{Ad}$ doit assurer la condition de l'équation :

$$\left|\Delta_{A_{i,j}}\right|_{(i,j)\in\{1,2\}x\{1,2\}} = \left|\frac{\Delta x^{\alpha}}{x_0^{\alpha}} - \frac{\Delta x^{\beta}}{x_0^{\beta}}\right|_{(x^{\alpha},x^{\beta})\in\{R_s,L_d,L_q\}x\{R_s,L_d,L_q\}} \leq 1 \qquad [2.53]$$

Une étude rapide permet de définir les plages de variations relatives des paramètres électriques du servomoteur synchrone. On obtient ainsi une matrice de pondération $W_{Ad}$ de dimension minimale :

$$W_{Ad} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [2.54]$$

2.3.3.2.3. La matrice d'entrée incertaine

Comme pour la matrice d'état incertaine, nous approximons les effets des erreurs paramétriques sur la matrice d'entrée $B$ dans le cadre d'incertitudes structurées. Nous noterons que cette structuration est ici évidente, comme le montre la matrice d'incertitude $\Delta_B$. Nous pouvons donc mettre, par l'intermédiaire de la matrice de pondération $W_B$, la matrice d'entrée incertaine $\tilde{B}$ sous la forme :

$$\tilde{B} = B_0.(I + \Delta B) = B_0.(I_{2x2} + \delta_B.W_B) \qquad [2.55]$$

avec la perturbation $\delta_B$ bornée et diagonale (structuration) c'est-à-dire :

$$\delta_B = diag\left\{\delta_{B_1}, \delta_{B_2}\right\} \text{ avec } \left|\delta_{B_i}\right|_{i\in\{1,2\}} \leq 1 \qquad [2.56]$$

Pour cela, on choisit comme fonction de pondération :

$$W_B = \begin{bmatrix} \Delta_{B_{11}} & 0 \\ 0 & \Delta_{B_{22}} \end{bmatrix} \qquad [2.57]$$

En ajoutant les pondérations et incertitudes sur $A$ et $B$, nous obtenons la représentation sous forme de schéma bloc de la figure 2.11.

Nous pouvons maintenant construire la représentation d'état du système $\tilde{G}$ perturbé par les incertitudes paramétriques. Cette mise sous forme d'un système généralisé met en exergue les incertitudes structurées $\Delta_A$ et $\Delta_B$. Elle est une étape nécessaire pour l'étude de la robustesse par la valeur singulière structurée $\mu(M)$. Ce système d'état contient donc la réunion du système physique $(A,B)$ et des pondérations $W_B$ $W_{Ag}$.

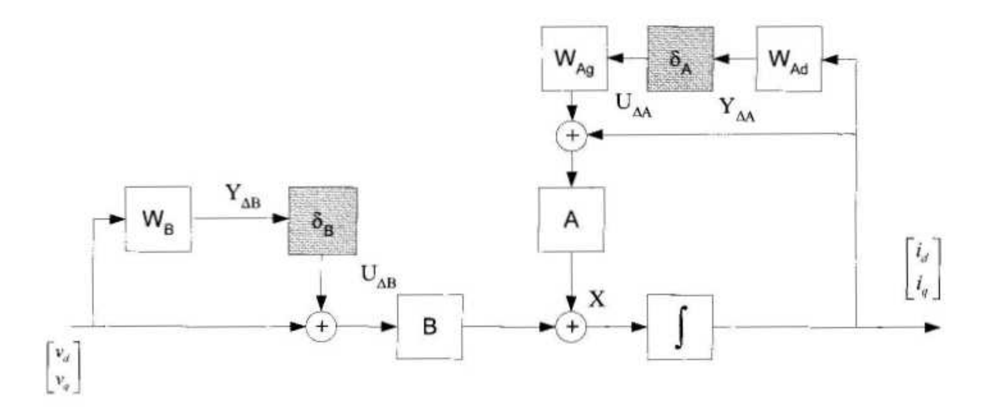



**Figure 2.11.** *Couplage fictif prenant en compte les incertitudes matricielles*

Soit $u_{\Delta_A} \in \Re^4, y_{\Delta_A} \in \Re^4$ les entrées/sorties du bloc d'incertitude $\Delta_A$, et $u_{\Delta_B} \in \Re^2, y_{\Delta_B} \in \Re^2$ les entrées/sorties du bloc d'incertitude $\Delta_B$. La forme standard de $\tilde{G}$ peut ainsi s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} = A.(x + W_{Ag}.u_{\Delta A}) + B.(u_{\Delta B} + \begin{bmatrix} v_d \\ v_d \end{bmatrix}) \\ y = W_{A_d}.x + W_B.\begin{bmatrix} v_d \\ v_d \end{bmatrix} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{B}.\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x} + \mathbf{D}.\mathbf{u} \end{cases} \qquad [2.58]$$

avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = A, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A.W_{Ag} & B & B \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} W_{Ad} \\ O_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} \end{bmatrix}$$

et :

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} \\ O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} \\ O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} & W_B \\ O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} & O_{2x2} \end{bmatrix} \qquad [2.59]$$

Le vecteur d'état reste celui du système nominal $x=[i_d \;\; i_q]^t$. Les vecteurs d'entrée et de sortie sont définis par :

$$u_{\tilde{G}}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\Delta_A} \\ u_{\Delta_B} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad u_{\tilde{G}} \in \Re^8$$

et :

$$y_{\tilde{G}}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{\Delta_A} \\ y_{\Delta_B} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad y_{\tilde{G}} \in \Re^8 \qquad [2.60]$$

La représentation standard de ce système augmenté $\tilde{G}$ est donnée par les schémas blocs de la figure 2.12. Nous avons aussi représenté les incertitudes structurées générées par les erreurs de modèles.

#### 2.3.3.3. *Erreur de modèle de l'onduleur*

##### 2.3.3.3.1. Mise en place de l'incertitude

Après les erreurs paramétriques, une autre source d'erreurs doit être prise en compte : le fonctionnement échantillonné de l'onduleur. Notre but n'est pas d'obtenir une modélisation fine de ce dernier. Nous devons plutôt définir une approximation permettant la prise en compte des effets perturbateurs de la commutation. Dans cette optique, le modèle que nous utiliserons ici est un modèle au sens des valeurs moyennes, c'est-à-dire :

$$G_{ond}(s)=K_{ond}.e^{-\tau_{on}.s}.I_2 \qquad [2.61]$$

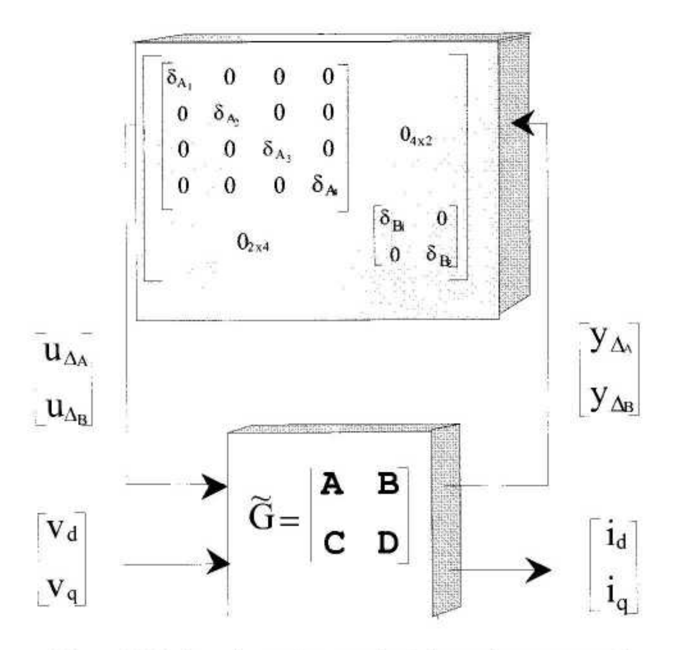



**Figure 2.12.** *Représentation standard du système augmenté*

Le gain $K_{ond}$ est directement proportionnel à la tension continue *E* d'alimentation de l'onduleur. Comme son action est directement prise en compte lors de l'implantation expérimentale du correcteur, il sera donc négligé pour cette étude :

$$G_{ond}(s) = e^{-\tau_{on}.s}.I_2 \qquad [2.62]$$

La modélisation du retard statistique $\iota_{ond}$ de l'onduleur de tension fonctionnant en MLI se traduit classiquement par une incertitude multiplicative [THO 95] en entrée pour chaque entrée $v_d$ et $v_q$ :

$$\widetilde{G}(s) = G(s).[+I + W_{Ond}(s).\Delta_{Ond}(s)] \qquad [2.63]$$

avec la condition :

$$\left\|\Delta_{Ond}(s)\right\|_{\infty} < 1 \qquad [2.64]$$

2.3.3.3.2. Calcul de la fonction de pondération

La fonction de pondération que nous devons construire traduit la prise en compte des dynamiques négligées de l'onduleur. Les erreurs de modèles considérées ici sont donc bornées en fréquence. Nous travaillons ainsi dans le cadre des incertitudes non structurées en définissant la fonction de pondération $W_{ond}$ par un gabarit fréquentiel. La relation d'incertitude multiplicative en entrée [2.63] permet de définir la fonction de pondération $W_{ond}$ :

$$|W_{ond}(j\omega)| \geq \left|\frac{\widetilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - I_{2x2}\right| = \left|e^{-\tau_{ond}j\omega} - 1\right|.I_{2x2} \qquad [2.65]$$

Soit, par approximation de Padé :

$$W_{ond}(s) = k_{ond}.\frac{2.\tau_{ond}.s}{\tau_{ond}.s+1}.I_{2x2} \qquad [2.66]$$

Le gain $k_{ond}$ a été introduit de manière à obtenir, pour toute la plage de fréquence :

$$\sup_{\omega} \overline{\sigma}(\Delta_{Ond}(j.\omega)) < 1 \qquad [2.67]$$

comme le montre la figure 2.13 pour $\tau_{ond}$ = 500 µs et $k_{ond}$ = 1,05.

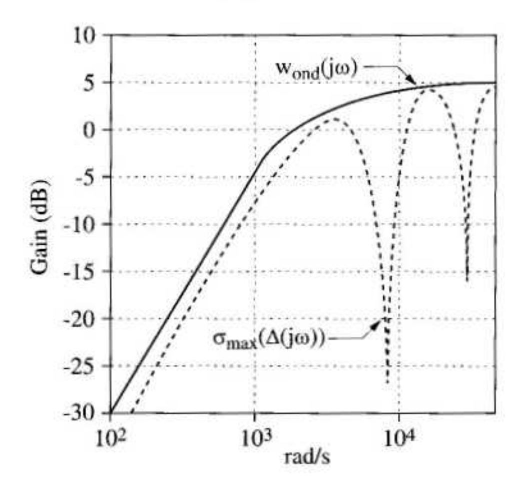



**Figure 2.13.** *Fonction de pondération $W_{ond}$ majorant un retard exprimé par Padé*

Mise sous la forme d'état, on obtient donc comme fonction de pondération de l'onduleur $W_{ond}$ :

$$W_{ond} = \begin{bmatrix} A_{ond} & B_{ond} \\ C_{ond} & D_{ond} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} A_{ond} = -\dfrac{1}{\tau_{ond}}.I_{2x2} \\ B_{ond} = I_{2x2} \\ C_{ond} = -\dfrac{1}{\tau_{ond}}.I_{2x2} \\ D_{ond} = 2.I_{2x2} \end{cases} \qquad [2.68]$$

La prise en compte du retard d'une période de calcul due à la numérisation du processus de contrôle peut être parfaitement intégrée dans l'étude précédente de la modélisation de l'onduleur. La fonction de transfert associée [2.69] est parfaitement identique à [2.62] définissant l'onduleur :

$$G_{retard}(s) = e^{-\tau_{retard}.s}.I_2 \qquad [2.69]$$

Dans la suite de notre étude, l'incertitude $\Delta_{ond}$ et sa pondération associée $W_{ond}$ traduisent simultanément les erreurs de modèle de l'onduleur et le retard de discrétisation numérique. Nous poserons pour cela comme nouveau retard fictif de l'onduleur :

$$\tau_{ond} = \tau_{ond} + \tau_{retard} = 1{,}5 * T_e \qquad [2.70]$$

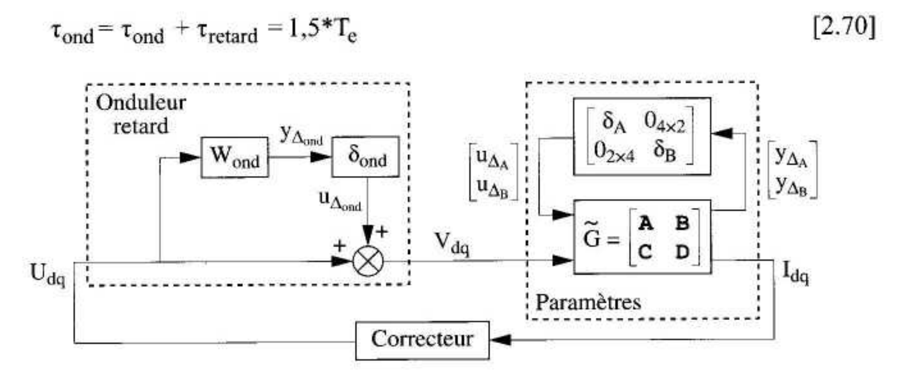



**Figure 2.14.** *Structure complète du système pour la robustesse en stabilité*

Le système perturbé avec les différentes erreurs de modèles que nous considérons pour notre étude de la robustesse est représenté sur la figure 2.14.

Ces différentes contraintes que nous venons de définir vont nous permettre de comparer les différents correcteurs proposés au niveau de leur robustesse en stabilité.

2.3.3.4. *Mise sous forme généralisée*

Pour pouvoir mettre en œuvre la μ-analyse de la stabilité, nous devons exprimer le système sous la forme boucle fermée standard dite forme « MΔ » [DOY 93]. M représente la matrice de transfert nominale du système bouclé et des pondérations.

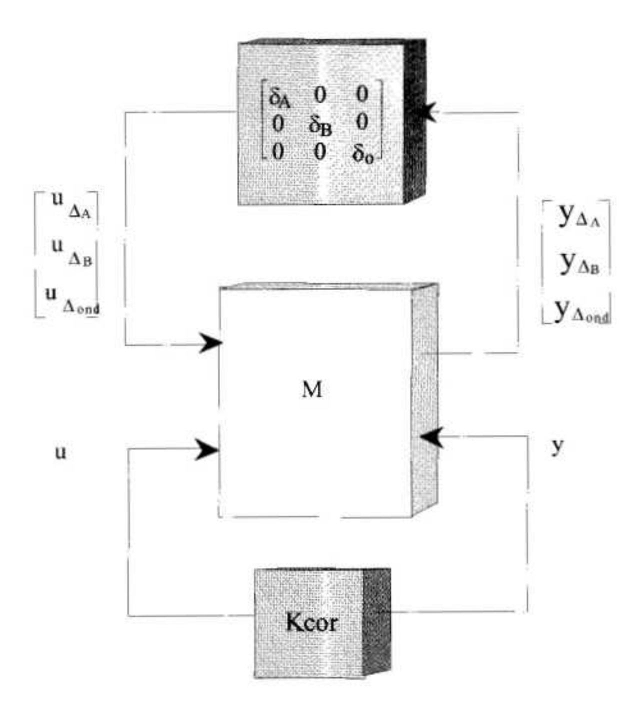



**Figure 2.15.** *Structure du système généralisé sous la forme standard*

2.3.3.5. *Valeur singulière structurée et μ-analyse*

L'analyse de la robustesse en stabilité revient à définir des conditions suffisantes telles que la matrice $(I + M(s).\Delta(s))$ soit non singulière pour toutes les fréquences et pour toute perturbation $\Delta(s)$.

La valeur singulière structurée [POS 93] est définie telle que :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M(s)) = \frac{1}{\min\limits_{\Delta \in \underline{\Delta}} \left\{ \overline{\sigma}(\Delta), \det((I - M(s).\Delta(s)) = 0 \right\}} \qquad [2.71]$$

avec en outre :

si $det(I - M(s)\Delta(s)) \neq 0$ alors $\mu_{\underline{\Delta}}(M) = 0$

La valeur de μ spécifie [MOS 93] la norme de la plus petite perturbation structurée $\Delta \in \underline{\Delta}$ qui déstabilise le système en boucle fermée. La condition $det(I - M\Delta) \neq 0$ est obtenue pour $\sigma(M\Delta) \leq 1$.

Si sur l'ensemble des fréquences $\mu_{\Delta}(M_1(s))<1$, nous garantissons alors que [MOS 93] la norme du produit de la plus petite perturbation structurée $\Delta \in \underline{\Delta}$ qui déstabilise le système en boucle fermée avec sa pondération associée est inférieure à l'unité. Donc nous montrons que le correcteur analysé stabilise en boucle fermée le système et répond à l'ensemble des critères de robustesse en stabilité.

Une étude similaire permet d'analyser la robustesse en performance de l'asservissement proposé. Elle nécessite la traduction sous forme d'incertitude non structurée des contraintes de performance. Pour la simulation, le modèle écrit dans le repère du flux statorique convient, évitant ainsi les changements de repère. On peut aussi utiliser des modèles prenant en compte les pertes fer, la saturation et une répartition des fuites entre le stator et le rotor. On peut également inclure l'onduleur à MLI. Cependant, il est souhaitable de ne pas introduire tous les phénomènes simultanément (on n'en est d'ailleurs pas toujours capable) car le modèle obtenu est bien plus lent à simuler et surtout parce que, en cas de problème, le ou les phénomènes en cause seront difficiles à cerner.

## 2.4. Modèle de simulation

### 2.4.1. *Introduction*

La simulation précise d'une association convertisseur-machine-commande (CMC) pose des questions tout à fait spécifiques qui doivent être traitées soigneusement. Nous allons en présenter quelques-unes. D'une manière générale, une association (CMC) se compose :

– d'une source d'alimentation : continue ou alternative, parfaite ou non,

– d'un ou plusieurs convertisseurs,

– de machine électrique tournante,

– de commandes des convertisseurs statiques : boucles ouvertes ou fermées.

L'étude des associations CMC pose un certain nombre de problèmes [BEN 91, LED 81] liés :

– à la nature non linéaire des éléments semi-conducteurs constituant le convertisseur statique dont les changements d'états, « passants » ou « bloqués », provoquent des changements de configuration du convertisseur. Ceci conduit à différents états de conduction du système, où chacun d'entre eux est régi par un ensemble d'équations et représente ainsi un modèle de fonctionnement ;

– aux dimensions des systèmes considérés qui se traduisent par un ordre élevé des équations qui les régissent ;

– à l'hétérogénéité des organes constituant les systèmes étudiés : une association CMC est constituée de plusieurs organes physiques de natures différentes (logique, analogique et mixte) et de constantes de temps différentes ;

– à la forte interdépendance et interaction des différents organes du système complet. En ce sens, un changement de modèle d'un organe entraînera des modifications en cascade et simultanées des « modèles » des autres parties du système.

La simulation d'une association CMC est toujours précédée des étapes préliminaires suivantes :

1) l'analyse fonctionnelle du système complet et de chacun des organes le constituant ;

2) la détermination de l'ensemble des « modèles » décrivant le comportement de chaque organe, en particulier et du système complet en général ;

3) l'établissement des algorithmes de résolution pour chaque modèle ;

4) la définition des évènements conduisant à des changements de modèles. Ces évènements, en majorité imprévisibles, peuvent être :

- soit intrinsèques (par exemple blocage d'une diode par extinction du courant),

- soit provoqués par des organes externes au circuit de puissance (amorçage d'un thyristor par envoi d'une impulsion sur sa gâchette) ;

5) la détermination des lois d'enchaînement des modèles des différents organes et du système complet.

La procédure classique de simulation des associations CMC (figure 2.16) consiste à prendre en compte successivement les différents organes dans l'ordre auquel ils sont sensés agir les uns sur les autres. Mais avant de bâtir le simulateur

d'un système physique, il est nécessaire de le modéliser. Dans ce contexte, nous décomposons les associations convertisseurs-machines-commandes en trois sous-systèmes : commandes, convertisseurs et système de puissance.

Dans cette section, nous nous attacherons plus particulièrement à la modélisation du système de puissance. L'exemple de la machine synchrone autopilotée et alimentée en courant permet d'illustrer les principes et la démarche de modélisation d'un système de puissance.

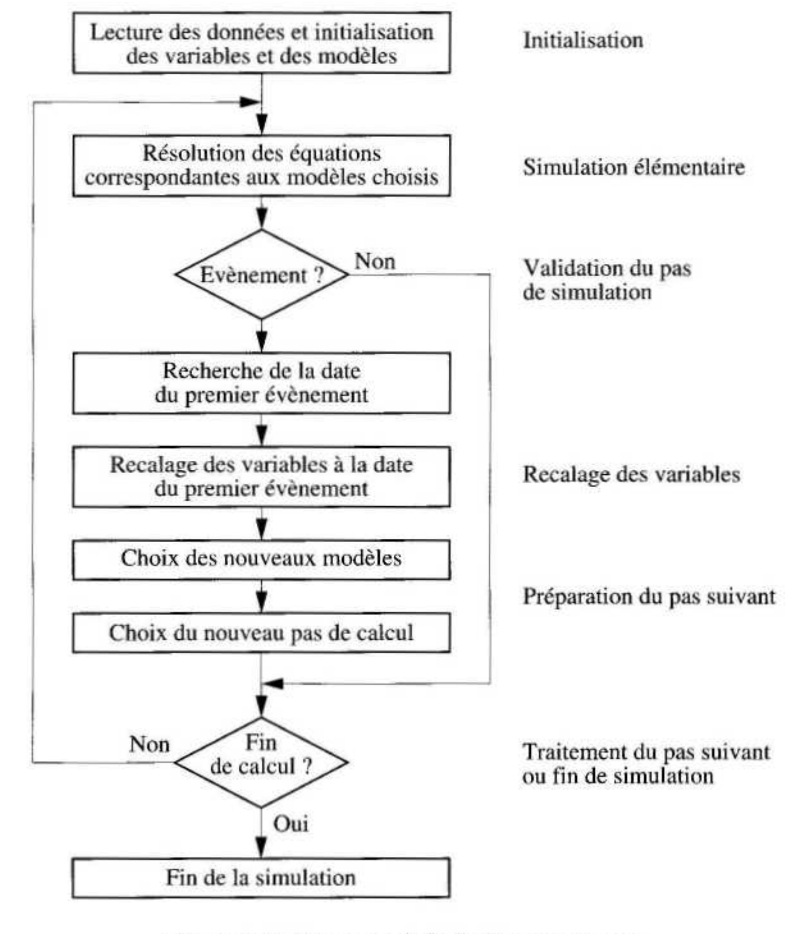



**Figure 2.16.** *Structure générale d'un programme de simulation d'une association CMC*

### 2.4.2. *Description du système physique*

Le système considéré (figure 2.17) se compose de deux ponts de thyristors notés P1et P2, reliés entre eux par un circuit de lissage ($R_{lis}$, $L_{lis}$) et d'une machine synchrone à pôles saillants.

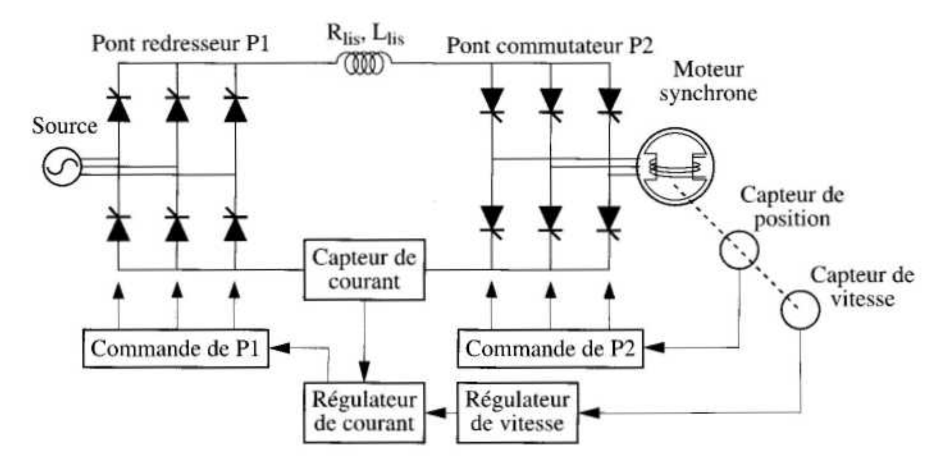



**Figure 2.17.** *Schéma de principe de la machine synchrone autopilotée alimentée en courant*

### 2.4.3. *Modélisation des « convertisseurs »*

Il est possible de représenter l'état de chacun des deux ponts, redresseur et commutateur, par une matrice de connexion [LED 77]. Les deux matrices associées respectivement à P1 et P2 sont notées MCr et MCc [BEN 91].

#### 2.4.3.1. *Redresseur*

Ce bloc a trois entrées et deux sorties. Il est représenté par une matrice de connexion [*MCr*] de dimension (3,2). En ne tenant pas compte des commutations entre deux phases du réseau, la matrice [*MCr*] ne peut avoir plus de deux éléments égaux à 1 en même temps. [*MCr*] permet d'évaluer la tension redressée, à la sortie du pont P1 et les courants de source. On a :

$$U_{red} = \sum_{i=1}^{3} \left[ MCr(i,1) - MCr(i,2) \right] V_s(i) \qquad [2.72]$$

$$I_s(i) = \left[ MCr(i,1) - MCr(i,2) \right] I_{red} \qquad [2.73]$$

où $V_s$ *(i)* et $I_s$ *(i)* représentent respectivement la tension et le courant de la phase *i* de la source. L'élément *MCr (i,j)* aura la valeur 1, si le thyristor *TH (i,j)* reliant l'entrée *i* du bloc redresseur à la sortie *j*, est conducteur, et 0 dans le cas contraire.

On rappelle qu'un thyristor n'est autorisé à conduire que si une impulsion est envoyée sur sa gâchette et que la tension à ses bornes est positive. Une fois conducteur, le thyristor ne se bloque que si le courant le traversant s'annule.

2.4.3.2. *Commutateur*

Le bloc commutateur a deux entrées et trois sorties ; il est alors représenté par une matrice de connexion *[MCc]* de dimension (2,3).

*[MCc]* permet de déterminer le modèle de fonctionnement du système de puissance. Dans le cas général, trois modes de fonctionnement sont possibles :

– mode 1 : aucune phase statorique n'est alimentée ;

– mode 2 : deux phases statoriques sont alimentées ;

– mode 3 : trois phases statoriques sont alimentées.

Comme nous l'avons vu pour le pont redresseur, chaque élément de la matrice *MCc* représente l'état de conduction du thyristor correspondant. L'élément *MCc (i,j)* prend la valeur 1 si le thyristor *TH* (*i,j*) reliant l'entrée *i* ($i = 1{,}2$) du bloc commutateur à la sortie *j* ($j = 1{,}2{,}3$) est conducteur, et 0 dans le cas contraire. *Dans le cas du démarrage en pas à pas* [BEN 91, GUI 80] *de la machine synchrone autopilotée, seuls les modes 1 et 2 sont envisageables. Dans le cas du régime autosynchrone, les trois modèles de fonctionnement du système de puissance sont possibles*. Le calcul des modes de fonctionnement se fait comme suit :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{MCc}(i,j) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Mode 1} \qquad [2.74]$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{MCc}(i,j) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Mode 2} \qquad [2.75]$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{MCc}(i,j) = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Mode 3} \qquad [2.76]$$

### 2.4.4. *Modélisation du système de puissance*

Nous entendons par système de puissance, l'ensemble tension redressée, circuit de lissage, commutateur et moteur synchrone.

### 2.4.4.1. *Equations électriques générales de base de la machine synchrone*

La machine considérée est un moteur synchrone à pôles saillants. Il comporte au stator un enroulement triphasé, au rotor un enroulement d'excitation parcouru par un courant continu et des amortisseurs modélisés par deux enroulements en court-circuit et en quadrature l'un par rapport à l'autre (figure 2.18).

Dans toute la suite, les phénomènes de saturation et les harmoniques d'espace dans la machine synchrone sont négligés, et on suppose que l'inducteur est alimenté sous une tension constante $V_f$.

Les équations de la machine s'écrivent alors sous la forme classique suivante :

$$\begin{bmatrix}[V_s]\\[V_r]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[R_s] & [0]\\ [0] & [R_s]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[I_s]\\ [I_r]\end{bmatrix}+\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix}[L_s] & [L_{sr}]\\ [L_{sr}]^t & [L_r]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[I_s]\\ [I_r]\end{bmatrix}\right\} \qquad [2.77]$$

avec :

$[V_s]=[v_a\ v_b\ v_c]^t$ $\qquad$ $[I_s]=[i_a\ i_b\ i_c]^t$

$[V_r]=[V_f\ 0\ 0]^t$ $\qquad$ $[I_r]=[I_f\ I_D\ I_Q]^t$

$$[R_s]=R_s\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad [R_r]=\begin{bmatrix}R_f&0&0\\0&R_D&0\\0&0&R_Q\end{bmatrix}\quad [L_r]=\begin{bmatrix}L_f&M_{fD}&0\\M_{fD}&L_D&0\\0&0&L_Q\end{bmatrix}$$

$$[L_s]=\begin{bmatrix}L_{aa0}&M_{ab0}&M_{ab0}\\M_{ab0}&L_{aa0}&M_{ab0}\\M_{ab0}&M_{ab0}&L_{aa0}\end{bmatrix}+L_{aa2}\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos 2\theta\\ \cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos 2\theta & \cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\end{bmatrix}$$

$$[L_{sr}]=\begin{bmatrix}M_{af}\cos\theta & M_{aD}\cos\theta & -M_{aQ}\sin\theta\\ M_{af}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{aD}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & -M_{aQ}\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\\ M_{af}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & M_{aD}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & -M_{aQ}\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\end{bmatrix}$$

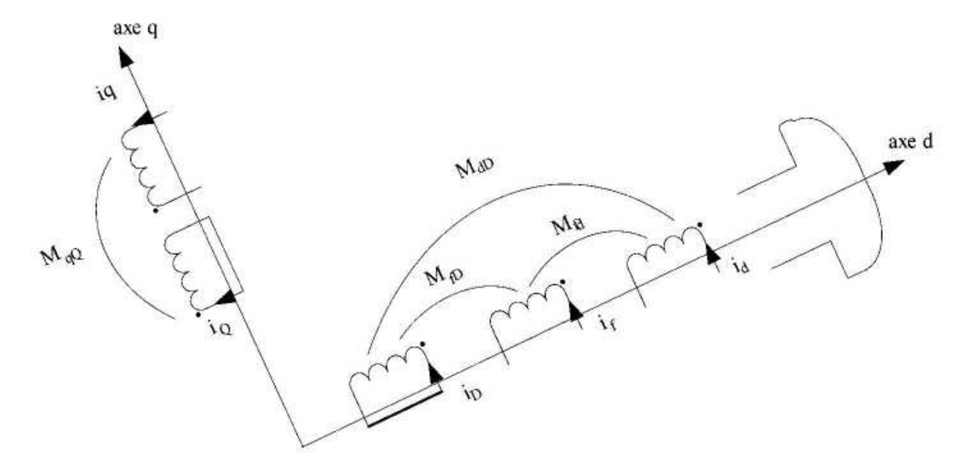



**Figure 2.18.** *Schéma équivalent de la machine synchrone dans le repère* dq

Les paramètres de la machine suivant le repère *abc* peuvent être écrits en fonction de ceux du repère *dq* [LES 81] :

$$\begin{cases} L_{aa0} = \dfrac{L_d + L_q}{3} & , L_{aa2} = \dfrac{L_d - L_q}{3} & , M_{ab0} = -\dfrac{L_d + L_q}{6} \\ M_{af} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\ M_{df} & , M_{aD} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\ M_{dD} & , M_{aQ} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\ M_{qQ} \end{cases} \qquad [2.78]$$

2.4.4.2. *Equations des différents modes de fonctionnement du système de puissance*

Les équations électriques du système de puissance peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante [LED 81] :

$$[L_i]\frac{d}{dt}[I_i] = [V_i] - [R_i][I_i] \qquad [2.79]$$

où *i* est l'indice du mode de fonctionnement.

On ne considère possibles que les modes de fonctionnement suivants :

– mode 1 : aucun thyristor n'est conducteur,

– mode 2 : deux thyristors sont conducteurs,

– mode 3 : trois thyristors sont conducteurs.

Les matrices $[L_i]$ et $[R_i]$ sont de dimensions différentes suivant le mode de fonctionnement du système de puissance. Elles sont données par :

$$[L_i]=\begin{bmatrix} [L_s^i] & [L_{sr}^i] \\ [L_{sr}^i]^t & [L_r] \end{bmatrix} \qquad [2.80]$$

$$[R_i]=\begin{bmatrix} [R_s^i] & [R_{sr}^i] \\ [R_{sr}^i]^t & [R_r] \end{bmatrix} \qquad [2.81]$$

Les matrices $[L_r]$ et $[R_r]$ sont des constantes et ne dépendent pas du mode de fonctionnement.

2.4.4.2.1. Equations du mode 1

Pour ce mode, aucune phase statorique n'est alimentée, seuls les courants rotoriques sont non nuls. Nous aurons donc simplement :

$$\begin{cases} [i_1]=\begin{bmatrix} I_f & I_D & I_Q \end{bmatrix}^t \\ [V_1]=\begin{bmatrix} V_f & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \\ [L_1]=[L_r] \quad , \quad [R_1]=[R_r] \end{cases} \qquad [2.82]$$

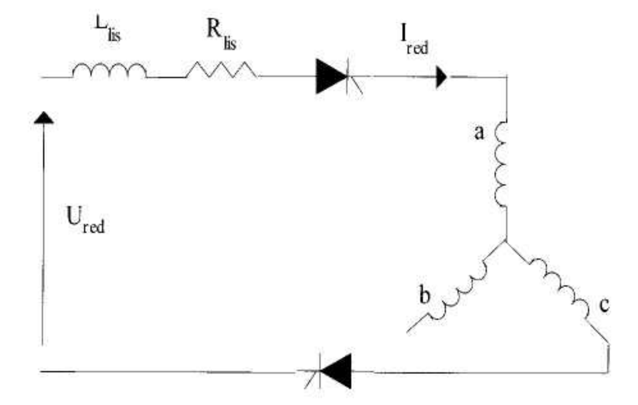



**Figure 2.19.** *Schéma équivalent du mode 2*

2.4.4.2.2. Equations du mode 2

En supposant que les phases $a$ et $c$ du moteur sont alimentées, le schéma du système de puissance, correspondant à ce mode, est représenté à la figure 2.19.

A partir du circuit électrique donné à la figure 2.19, on peut écrire :

$$U_{red} = R_{lis}\ I_{red} + L_{lis}\frac{d}{d_t} I_{red} + (v_a - v_c) \quad [2.83]$$

En combinant les deux équations [2.79] et [2.83], on établit les vecteurs et les matrices correspondants à ce mode de fonctionnement du système de puissance [BEN 91, GUI 80, LED 81] :

$$\begin{aligned}
&[I_2] = \begin{bmatrix} I_{red} & I_f & I_D & I_Q \end{bmatrix}^t \\
&[V_2] = \begin{bmatrix} U_{red} & V_f & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \\
&\left[L_s^{\ 2}\right] = L_{lis} + L_d + L_q + (L_d - L_q)\sin\left(2\ \xi + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\left[L_{sr}^{\ 2}\right] = \sqrt{2}\left[M_{fd}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right)\quad M_{dD}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right)\quad M_{qQ}\cos\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&\left[R_s^{\ 2}\right] = R_{lis} + 2R_s + 2(L_d - L_q)\,\omega\cos\left(2\ \xi + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\left[R_{sr}^{\ 2}\right] = \sqrt{2}\omega\left[M_{fd}\cos\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right)\quad M_{dD}\cos\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right)\quad -M_{qQ}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right)\right]
\end{aligned} \quad [2.84]$$

Ces expressions sont générales quelles que soient les deux phases alimentées ; seul l'angle $\xi$ change et dépend des thyristors conducteurs et de l'angle électrique $\theta$. L'angle $\xi$ est donné par le tableau 2.1.

Dans un pas de calcul, après résolution des équations électriques, on calcule les courants et les tensions dans les phases du moteur. Les courants dépendent de la matrice de connexion et du courant redressé :

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = [M_{Cc}]^t \begin{pmatrix} I_{red} \\ -I_{red} \end{pmatrix} \quad [2.85]$$

En substituant la relation [2.85] dans les équations générales [2.77], on détermine les tensions de phase du moteur ($v_a$, $v_b$, $v_c$).

2.4.4.2.3. Equation du mode 3

Ce mode de fonctionnement correspond à la commutation de deux phases du moteur. Les trois phases statoriques sont alimentées.

La figure 2.20 représente le schéma du système de puissance lorsque les phases *b* et *c* commutent.

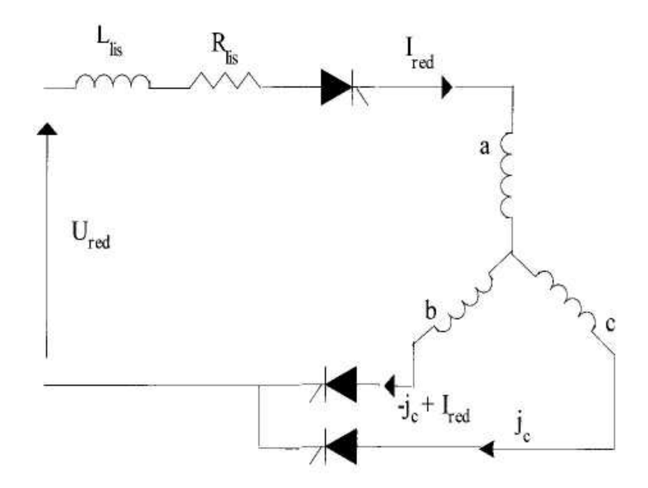



**Figure 2.20.** *Schéma équivalent du mode 3*

Dans ce cas, en plus des courants rotoriques, $I_f$, $I_D$ et $I_Q$ et du courant redressé, on a une cinquième inconnue à déterminer ; c'est le courant de commutation $j_c$.

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} i_a = I_{red} \\ i_b = -I_{red} + J_c \\ i_c = -j_c \\ U_{red} = R_{lis} I_{red} + L_{lis} \dfrac{d}{dt} I_{red} + \left(\mathrm{v_a - v_b}\right) \end{cases} \qquad [2.86]$$

Après développement des calculs, on obtient :

$$[I_3]=\begin{bmatrix} j_c & I_{red} & I_f & I_D & I_Q \end{bmatrix}^t$$

$$[V_3]=\begin{bmatrix} 0 & U_{red} & V_f & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$\left[L_s{}^3\right]=\begin{bmatrix} L_d+L_q-\left(L_d-L_q\right)\cos 2\xi & -\dfrac{L_d+L_q}{2}+\left(L_d-L_q\right)\sin\left(2\xi+\dfrac{\pi}{6}\right) \\ -\dfrac{L_d+L_q}{2}+\left(L_d-L_q\right)\sin\left(2\xi+\dfrac{\pi}{6}\right) & L_{lis}+\left(L_d+L_q\right)-\left(L_d-L_q\right)\sin\left(2\xi-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[L_{sr}{}^3\right]=\left[L_{rs}{}^3\right]^t=\sqrt{2}\begin{bmatrix} M_{fd}\sin\xi & M_{dD}\sin\xi & M_{qQ}\ \mathrm{os}\,\xi \\ -M_{fd}\sin\left(\xi-\dfrac{\pi}{3}\right) & -M_{dD}\sin\left(\xi-\dfrac{\pi}{3}\right) & -M_{qQ}\cos\left(\xi-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[R_s{}^3\right]=\begin{bmatrix} 2\left(R_s+\left(L_d-L_q\right)\ \omega\sin 2\xi\right) & -R_s+2\left(L_d-L_q\right)\omega\cos\left(2\xi+\dfrac{\pi}{6}\right) \\ -R_s+2\left(L_d-L_q\right)\omega\cos\left(2\xi+\dfrac{\pi}{6}\right) & R_{lis}+2\left(L_d-L_q\right)\omega\cos\left(2\xi+\dfrac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[R_{sr}{}^3\right]=\left[R_{rs}{}^3\right]^t=\sqrt{2}\omega\begin{bmatrix} M_{fd}\cos\xi & M_{dD}\cos\xi & M_{qQ}\sin\xi \\ -M_{fd}\cos\left(\xi-\dfrac{\pi}{3}\right) & -M_{dD}\cos\left(\xi-\dfrac{\pi}{3}\right) & -M_{qQ}\sin\left(\xi-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

[2.87]

L'angle $\xi$ dépend de l'angle électrique $\theta$ et des thyristors conducteurs. Il est donné par le tableau 2.1.

| **MODE 2** | | **MODE 3** |
|---|---|---|
| Thyristors conducteurs | $\xi$ | Thyristors conducteurs |
| TH (1,1) et TH (2,2) | $\theta-5\pi/3$ | TH (1,1), TH (1,3) et TH (2,2) |
| TH (1,1) et TH (2,3) | $\theta$ | TH (1,1), TH (2,2) et TH (2,3) |
| TH (1,2) et TH (2,3) | $\theta-\pi/3$ | TH (1,1), TH (1,2) et TH (2,3) |
| TH (1,2) et TH (2,1) | $\theta-2\pi/3$ | TH (1,2), TH (2,3) et TH (2,1) |
| TH (1,3) et TH (2,2) | $\theta-\pi$ | TH (1,2), TH (1,3) et TH (2,1) |
| TH (1,3) et TH (2,2) | $\theta-4\pi/3$ | TH (1,3), TH (2,1) et TH (2,2) |

**Tableau 2.1.** *Valeurs de l'angle ξ en fonction du mode de fonctionnement et des thyristors conducteurs*

Pour ce mode de fonctionnement, les courants de phases dépendent du courant redressé et du courant de commutation. Dans le tableau 2.2, on résume les différentes valeurs possibles des courants $i_a$, $i_b$ et $i_c$ en fonction de la matrice de connexion [MCc].

| Eléments de MCc égaux à 1 | $i_a$ | $i_b$ | $i_c$ |
|---|---|---|---|
| MCc (1,1), MCc (2,2) et MCc (2,3) | $I_{red}$ | $j_c - I_{red}$ | $-j_c$ |
| MCc (1,1), MCc (2,3) et MCc (1,2) | $I_{red} - j_c$ | $j_c$ | $-I_{red}$ |
| MCc (1,2), MCc (2,3) et MCc (2,1) | $-j_c$ | $I_{red}$ | $j_c - I_{red}$ |
| MCc (1,2), MCc (2,1) et MCc (1,3) | $-I_{red}$ | $I_{red} - j_c$ | $j_c$ |
| MCc (1,3), MCc (2,2) et MCc (2,3) | $j_c - I_{red}$ | $-j_c$ | $I_{red}$ |
| MCc (1,3), MCc (2,2) et MCc (1,1) | $j_c$ | $-I_{red}$ | $I_{red} - j_c$ |

**Tableau 2.2.** *Valeurs des courants de phases en fonction de la matrice de connexion*

Le calcul des tensions se fait de la même façon que pour le mode 2.

### 2.4.5. *Calcul de l'inverse de la matrice inductance*

Pour les deux modes de fonctionnement, mode 2 et mode 3, la résolution des équations électriques décrivant le système de puissance nécessite l'inversion des matrices inductances [$L_2$] et [$L_3$]. Le calcul de leur inverse se réduit donc aux calculs de l'inverse d'un scalaire pour le mode 2 et d'une matrice d'ordre 2 pour le mode 3.

En effet, la matrice inductance peut se mettre sous la forme suivante :

$$[L]=\begin{bmatrix} A_m & B_m \\ B_m{}^t & L_r \end{bmatrix} \qquad [2.88]$$

[L] est de dimension (n,n). La valeur de n dépend du mode pris par le système de puissance. $L_r$ est de dimension (3,3). La forme particulière de la matrice inductance permet de simplifier le calcul de son inverse qui se met sous la forme :

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \qquad [2.89]$$

$X_4$ est de même dimension que $L_r$.

Le produit de la matrice inductance et de son inverse est égal à la matrice identité. On a alors :

$$[L][L]^{-1} = \begin{bmatrix} A_m X_1 + B_m X_3 & A_m X_2 + B_m X_4 \\ B_m{}^t X_1 + L_r X^3 & B_m{}^t X_2 + L_r X_4 \end{bmatrix} = I_{n,n} \qquad [2.90]$$

d'où :

$$A_m X_1 + B_m X_3 = I_{n-3,\, n-3}$$

$$B_m{}^t X_1 + L_r X_3 = 0 \qquad [2.91]$$

$$A_m X_2 + B_m X_4 = 0$$

$$B_m{}^t X_2 + L_r X_4 = I_{3,\,3}$$

On en déduit :

$$X_1 = [A_m - B_m L_r^{-1} B_m{}^t]^{-1}$$

$$X_2 = -[A_m - B_m L_r^{-1} B_m{}^t]^{-1} B_m L_r^{-1} \qquad [2.92]$$

$$X_3 = -L_r^{-1} B_m{}^t [A_m - B_m L_r^{-1} B_m{}^t]^{-1}$$

$$X_4 = L_r^{-1} + L_r^{-1} B_m{}^t [A_m - B_m L_r^{-1} B_m{}^t]^{-1} B_m L_r^{-1}$$

Ainsi, le calcul de l'inverse de la matrice inductance revient à faire des opérations élémentaires. Une seule inversion d'une matrice (2,2) reste à effectuer dans la cas du mode 3.

### 2.4.6. *Modèle simplifié du système de puissance en régime permanent*

Dans l'étude du régime permanent, le modèle de puissance peut être simplifié en substituant la variable d'état courant redressé par une source de courant constant.

Dans ce cas, on ne fait intervenir que le pont commutateur, le capteur de position et la machine synchrone. Le nouveau système de puissance est constitué alors de la source de courant ($I_{red}$), du commutateur et du moteur synchrone (figure 2.21).

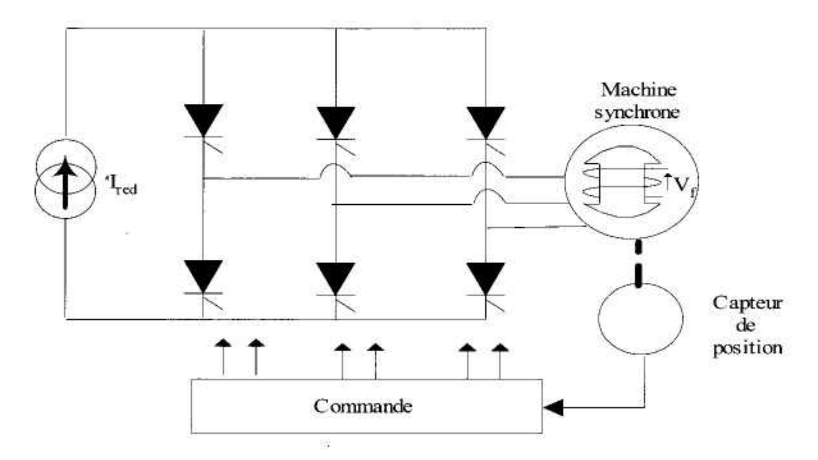



**Figure 2.21.** *Schéma du système de puissance*

Etant donné que le schéma du système de puissance est modifié et que le courant $I_{red}$ n'est plus une variable d'état (constant), les matrices résistances et inductances se simplifient ; elles seront développées pour les deux modes de fonctionnement possible, le mode 2 et le mode 3.

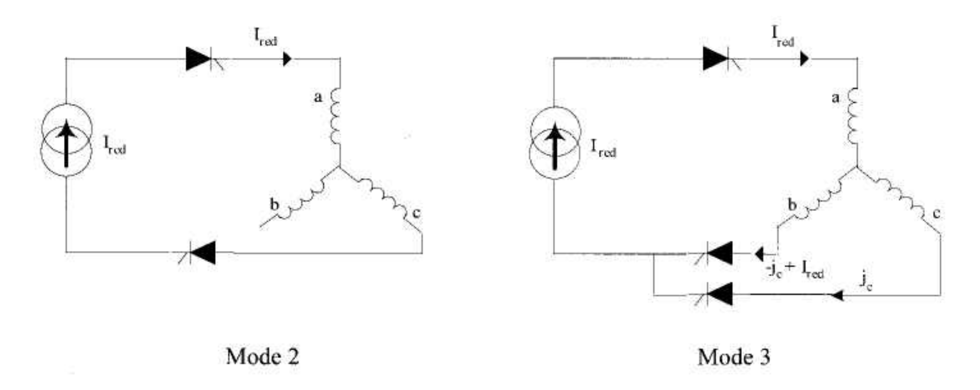



**Figure 2.22.** *Schéma équivalent pour le système simplifié*

2.4.6.1. *Equations électriques du mode 2*

Supposons que les phases *a* et *c* du moteur soient alimentées suivant la topologie de la figure 2.22 ($i_a = -i_b = I_{red}$), les courants $i_d$ et $i_q$ se mettent alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} i_d = \sqrt{2}\, I_{red} \sin\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right) \\ i_q = \sqrt{2}\, I_{red} \cos\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \quad [2.93]$$

Pour ce mode de fonctionnement, les seules inconnues à déterminer sont les courants rotoriques $i_f$, $I_D$ et $I_Q$. Les trois dernières équations du système suffisent pour les déterminer, on a alors :

$$[V_2] = \begin{bmatrix} V_f - \sqrt{2} M_{fd} I_{red} \omega \cos\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right) \\ -\sqrt{2} M_{dD} I_{red} \omega \cos\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} M_{qQ} I_{red} \omega \sin\left(\xi + \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad [I_2] = \begin{bmatrix} I_f \\ I_D \\ I_Q \end{bmatrix} \quad [2.94]$$

$$[L_2] = [L_r] \quad [R_2] = [R_r]$$

2.4.6.2. *Equations électriques du mode 3*

Considérons le cas de la topologie présentée à la figure 2.22, on pose :

$$\begin{cases} i_a = I_{red} \\ i_b = -I_{red} + j_c \\ i_c = -j_c \end{cases} \quad [2.95]$$

Les courants $i_d$ et $i_q$ deviennent :

$$\begin{cases} i_d = \sqrt{2}\left[ j_c \sin\xi - I_{red} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ i_q = \sqrt{2}\left[ j_c \cos\xi - I_{red} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{3}\right)\right] \end{cases} \quad [2.96]$$

Pour le mode 3 de fonctionnement, on a une inconnue supplémentaire $j_c$. Il est nécessaire de trouver une quatrième relation. Elle se déduit de l'égalité des tensions de phases du moteur $v_b$ et $v_c$ qui se traduit par la relation :

$$(v_d \sin\theta + v_q \cos\theta = 0) \qquad [2.97]$$

Après développement des calculs, on obtient les différents vecteurs et matrices décrivant ce mode de fonctionnement :

$$[V_3] = \begin{bmatrix} \left[R_s - 2\omega\left(L_d - L_q\right)\cos\left(2\xi + \frac{\pi}{6}\right)\right] I_{red} \\ I_{red}\sqrt{2}M_{fd}\omega\cos\left(\xi - \frac{\pi}{3}\right) + V_f \\ I_{red}\sqrt{2}M_{dD}\omega\cos\left(\xi - \frac{\pi}{3}\right) \\ -I_{red}\sqrt{2}M_{qQ}\omega \ \sin\left(\xi - \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$[I_3] = \begin{bmatrix} j_c & I_f & I_D & I_Q \end{bmatrix}^t \qquad [2.98]$$

$$\left[R^{s^3}\right] = 2\left[R_s + \omega\left(L_d - L_q\right)\sin(2\xi)\right]$$

$$\left[R_{sr}{}^3\right] = \sqrt{2}\omega\left[M_{df}\ \cos(\xi) \quad M_{dD}\cos(\xi) \quad - M_{qQ}\sin(\xi)\right]$$

$$\left[L_s{}^3\right] = \left[\left(L_d + L_q\right) - \left(L_d - L_q\right)\cos(2\xi)\right]$$

$$\left[L_{sr}{}^3\right] = \sqrt{2}\ \left[M_{df}\ \sin(\xi) \quad M_{dD}\sin(\xi) \quad M_{qQ}\cos(\xi)\right]$$

REMARQUE.– L'angle $\xi$ se calcule de la même façon que précédemment.

## 2.5. Conclusion

Le choix du niveau de modélisation est une étape importante dans le travail d'un concepteur de commandes de systèmes électriques associant des machines, des convertisseurs statiques et des organes de mesure. Ce chapitre, à l'aide de quelques exemples, a montré qu'il faut soigneusement faire une distinction entre les modèles de commande (fatalement idéalisés, mais que l'on peut rendre plus réalistes en y intégrant des modèles des erreurs), et les modèles de simulation qui peuvent être, eux aussi, plus ou moins réalistes suivant le degré de précision que l'on apporte à la

modélisation des convertisseurs. Quand un concepteur établit un modèle, il doit savoir exactement ce qu'il veut en faire, et choisir le niveau où il doit se situer, pour ne pas avoir un modèle de commande trop lourd, ou un modèle de simulation pas assez précis.

## 2.6. Bibliographie

[BAL 94] BALAS GJ., DOYLE JC., GLOVER K., μ-analysis and synthesis for use with Matlab, The MathWorks Compagny, 1994.

[BEN 91] BENKHORIS M.F., Contribution à la simulation numérique des différents variateurs de vitesse pour machines synchrones, Thèse de Doctorat de l'INP Lorraine, 17 mai 1991.

[BOR 85] BORDRY F., Synthèse des méthodes de simulation des convertisseurs statiques, Logiciel SCRIPT – Application en CAO – EAO, Thèse de Docteur ès sciences, INP Toulouse 1995.

[BUJ 97] BUJA G., CASADEI D., SERRA G., « Direct Torque Control of induction motor drives », *Conf. Proc. of ISIE'97*, Guimarães, vol. 1, p. TU2-TU8, 1997.

[CHA 95] CHAPUIS Y.A., ROYE D., COURTINE S., « Commande directe du couple d'une machine asynchrone par le contrôle direct de son flux statorique », *J. Phys. III*, T. 5, n° 6, p. 863-880, 1995.

[CHE 93] CHEVREL P., Commande robuste : application à la régulation d'un groupe turbo-alternateur, Thèse de doctorat, Paris sud, 24 juin 1994.

[DOR 92] DORATO D., FORTUNA L., MUSCATO G., *Robust control for unstructured perturbations – An introduction*, Springer Verlag, Berlin, 1992.

[DOY 82] DOYLE J.C., « Analysis of feedback systems with sutructured uncertainty », *IEE proceeding Part D*, vol. 129, p. 242-250, novembre 1982.

[DOY 93] DOYLE J.C., PACKARD A., « The complex structured singular value », *Automatica*, vol. 29, p. 71-109, janvier 1993.

[DUC 93] DUC G., Robustesse des systèmes linéaires multivariables, Polycopié Supélec 03317/a, 1993.

[GUI 80] GUILLOUARD G., Etude par simulation numérique d'une machine synchrone autopilotée, Thèse de Docteur-Ingénieur ENSEM, INPL Nancy, 1980.

[KAS 00] KASMIEH T., LEFEBVRE Y., HAPIOT J.C., « Modeling and experimental characterization of saturation effect of an induction machine », *The European Physical Journal – Applied Physics*, vol. 10, p. 123-130, 2000.

[LAR 00a] LAROCHE E., Méthodologies multimodèles pour l'identification et la commande robuste de la machine asynchrone, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 2000.

[LAR 00b] LAROCHE E., SEDDA E., LOUIS J.-P., « Erreurs de modélisation d'une machine asynchrone - application au réglage d'un filtre de Kalman », *Revue Internationale de Génie Electrique*, vol. 3, n° 1, p. 7-37, 2000.

[LAR 02] LAROCHE E., DURIEU C., LOUIS J.-P., « Erreur d'estimation des paramètres de la machine asynchrone », *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 36, n° 3, p. 481-496, 2002.

[LAR 03] LAROCHE E., MOREAU S., « Induction machine parameter estimation errors due to model uncertainties », *European Conference on Power Electronics and Applications*, Toulouse, 2003.

[LED 77] LE DŒUFF R., « A mathematical model for static converters allowing digital simulation of associate machines transients », *IEEE Trans on IECI – 24*, n° 1, p. 35-38, février 1977.

[LED 81] LE DŒUFF R., Contribution à la modélisation et à la simulation d'ensembles convertisseurs statiques – Machines tournantes, Thèse de Docteur ès sciences ENSEM, INPL Nancy, 1981.

[LED 95] LE DŒUFF R., « General principles and new trends in the simulation of static converters and drives », *Mathematics and Computers in Simulation*, 38, p. 263-270, 1995.

[LEM 99] LEMAIRE-SEMAIL B., LOUIS J.-P., BOUILLAULT F., « Computation of an induction machine inductances for extended analytical modeling accounting for saturation », *The European Physical Journal – Applied Physics*, n° 5, p. 257-267, 1999.

[LEO 90] LEONHARD W., *Control of electrical machines*, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[LES 81] LESENNE J., NOTELET F., SEGUIER G., *Introduction à l'Electrotechnique approfondie*, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1981.

[LEV 96] LEVI E., « Rotor flux oriented control of induction machines considering the core loss », *Electric Machines and Power Systems*, n° 24, p. 37-50, 1996.

[MOR 92] MOREIRA J.C., LIPO T.A., « Modeling of saturated ac machines including air gap harmonic components », *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 28, n° 2, p. 343-349, 1992.

[MOS 93] MOSER A.N., « Designing Controllers for flexible Structures with H-Infinity/μ-Synthesis », *IEEE Control Systems*, avril 1993.

[SAF 92] SAFONOV M.G., CHIANG R., Robust Control Toolbox for use with Matlab, The Math Works Compagny, 1992.

[TAK 86] TAKAHASHI I., NOGUCHI T., « A new quick-response and high-efficiency control strategy of an induction machine », *IEEE Trans. On IA*, vol. 22, n° 5, p. 820-827, 1986.

[THO 95] THOMAS J.L., Contribution à la commande robuste des machines asynchrones, Thèse de doctorat, Conservatoire des arts et métiers, Paris, 13 mars 1995.

Chapitre 3

# Modélisation physique des machines à courant alternatif

## 3.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation physique des machines à courant alternatif classiques. Nos ambitions sont les suivantes : nous voulons obtenir *in fine* les équations des machines synchrones et asynchrones sous les formes adéquates pour calculer leurs commandes dans le cadre classique des « transformations de Park » ou des « phaseurs ». Les modèles recherchés sont décrits par des inductances de façon que l'on puisse écrire des relations de la forme :

$$\psi_\delta = \sum_\gamma L_{\delta\gamma}(\theta).i_\gamma$$

Le but ultime consiste à rechercher les expressions des inductances $L_{\delta\gamma}$, mais celles-ci ne sont pas de formes « quelconques » : elles ont des formes particulières qu'il est nécessaire de mettre en évidence. Cela exige une démarche spécifique :

– il faut, d'une part, rappeler les lois de la physique qui sont effectivement mises en jeu. Il s'agit des équations des champs magnétiques dans le cadre de « l'approximation des états quasi permanents », d'une modélisation simple des propriétés des matériaux, et des propriétés fondamentales relatives à la conversion d'énergie électromécanique (section 3.2) ;

Chapitre rédigé par Jean-Paul LOUIS, Gilles FELD, Sandrine MOREAU.

– ces lois de la physique doivent être appliquées dans des géométries particulières, celles des machines tournantes classiques. Ces géométries réalisent en fait une optimisation technico-économique des systèmes de conversion d'énergie électromécanique, et ces géométries possèdent de remarquables propriétés de simplicité et de symétrie qui sont mises à profit dans la modélisation des machines. Ces propriétés sont associées à toute une série d'hypothèses simplificatrices qui sont à la fois classiques et nécessaires pour permettre la modélisation classique de Park. On résume ainsi ces hypothèses : symétrie, linéarité, premier harmonique. La section 3.3 présente les géométries particulières des machines et les hypothèses fondamentales. Nous avons choisi un point de vue assez amont pour permettre à un lecteur qui lit des articles sur des machines non classiques, soit parce qu'elles sont « spéciales », soit parce qu'il s'agit de machines classiques dans un fonctionnement non classique (machines très saturées, machines avec de fortes pertes fer, machines endommagées qui ne sont plus symétriques, machines ne respectant pas l'hypothèse du premier harmonique), de comprendre quelles hypothèses il faut critiquer et quelles extensions il faut alors faire. De telles questions sont d'ailleurs traitées dans les chapitres 3 et 7 du second volume. Ce chapitre présente aussi les outils fondamentaux pour la modélisation : le potentiel magnétique scalaire et la force magnétomotrice, la perméance et la perméance superficielle, la composante normale de l'induction. Il s'agit le plus souvent de « grandeurs locales décrivant le champ ». Nous décrivons aussi les principaux types d'enroulement : monophasés et polyphasés, à une paire de pôles et multipolaires, bobinés ou à cage ou à pièces polaires. Nous donnons à chaque fois les modèles mathématiques dans le cadre des hypothèses classiques de Park (premier harmonique, linéarité), et nous donnons des schémas se situant à différents niveaux : schémas aussi réels que possible, schémas idéalisés, schémas équivalents symboliques ;

– ces outils sont ensuite utilisés pour calculer l'expression générale de l'inductance mutuelle $L_{\delta\gamma}$ existant entre deux enroulements quelconques dans une machine tournante. Il faut alors s'intéresser aux flux dans une spire et au flux dans une phase qui sont des grandeurs globales. Là aussi, la démonstration se situe dans le cadre des hypothèses classiques de Park. Le résultat essentiel est résumé par la formule [3.74] dont il faut tout à la fois comprendre la signification de chaque terme, connaître les hypothèses qui la sous-tendent, et savoir comment l'appliquer dans les cas particuliers. Toutes ces questions sont traitées dans la section 3.4 ;

– enfin, il faut déduire les modèles matriciels des machines à courant alternatif classiques. La section 3.5 présente simultanément une description des machines synchrones et asynchrones au moyen des outils présentés dans les paragraphes précédents, et leur modélisation au sens des hypothèses de Park. Etant donné le grand nombre de variables considérées, une représentation matricielle est nécessaire. Nous avons choisi de décomposer le modèle en sous-matrices pour mettre en valeur leurs propriétés (le chapitre 4, « Propriétés vectorielles » s'appuie fondamentalement

[redacted]

sur ces propriétés). Les résultats des paragraphes précédents nous permettent de donner la forme de tous les éléments ainsi que les expressions détaillées des principaux éléments qui interviennent dans ces équations.

## 3.2. Rappel des lois physiques relatives au champ magnétique et à la conversion d'énergie

### 3.2.1. *Le champ électromagnétique*

#### 3.2.1.1. *Les vecteurs fondamentaux et les sources du champ*

Le champ électromagnétique est décrit, dans l'espace à trois dimensions repéré par un référentiel galiléen ($S$), par un ensemble de vecteurs qui permettent de définir les interactions entre les courants et certains matériaux nommés *magnétiques* et *diélectriques*. Le champ électromagnétique est décrit par des vecteurs dont les composantes dépendent du point de l'espace considéré, noté $M$, et du temps, noté $t$. Ces vecteurs sont au nombre de quatre et nous donnons ici leur nomenclature dans le vocabulaire des électrotechniciens français :

– l'*excitation*[1] : $\vec{H}(M,t)$, unité : A/m ;

– l'*induction magnétique*[2] : $\vec{B}(M,t)$, unité : Tesla (symbole : $T$, on a $1\,T = 1\,V.s/m^2 = 1\,weber/m^2$) ;

– le *déplacement électrique* : $\vec{D}(M,t)$, peu utilisé en électrotechnique ;

– le *champ électrique* : $\vec{E}(M,t)$, unité : V/m.

Nous ne détaillerons pas ici les équations de Maxwell dans le cas général ; nous ne les énoncerons au paragraphe 3.2.1.3 que dans le cadre de l'électrotechnique classique. Pour un exposé plus détaillé, on se reportera à des ouvrages plus proches de la physique [BER 86, COU 84, FEY 79, IVA 94, JUF 79, LAN 69]. Les équations de Maxwell relient ces vecteurs entre eux et avec les effets des sources constituées de charges et de courants et décrites par deux fonctions définies en chaque point $M$ de l'espace et chaque instant $t$ :

– la *densité* (scalaire) *de charge* $\rho(M,t)$ (unité : C/m$^3$) qui décrit la charge $dQ$ dans un élément de volume $d\tau$ (unité : Coulomb ($C$)) :

$$dQ = \rho(M,t).d\tau \qquad [3.1]$$

1. $H$ est dite aussi « champ magnétique » dans la norme.

2. $B$ est dite aussi « champ magnétique » dans la tradition de l'enseignement secondaire français. Elle est nommée *flux density* dans le vocabulaire anglo-saxon.

– la *densité* (vecteur) *de courant* $j(M,t)$ : si les charges, de densité $\rho$, sont animées d'une vitesse $\vec{v}$, alors le vecteur densité de courant est défini par (unité : $A/m^2$) :

$$\vec{j} = \rho.\vec{v} \qquad [3.2]$$

Nous verrons au paragraphe 3.2.2.1, formule [3.14] que ce vecteur permet de définir l'intensité du courant.

3.2.1.2. *Matériaux : lois de comportement macroscopiques*

On introduit les propriétés des matériaux en nous limitant aux cas simplifiés où l'on admet l'existence de « lois de comportement » valables au niveau macroscopique :

– pour les matériaux diélectriques, on définit la *permittivité* $\varepsilon$ par :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \qquad [3.3]$$

où $\varepsilon_r$ est la permittivité relative et $\varepsilon_0$ la permittivité de l'air, avec $\varepsilon_0 = 1/36.\pi.10^9$ dans le système normalisé international (SI). Ces paramètres sont constants ;

– pour les *matériaux magnétiques*, si importants dans la construction des machines électriques, les relations qui relient $\vec{B}$ et $\vec{H}$ peuvent avoir les deux formes suivantes :

$$\vec{B} = \mu_0.(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0.\vec{H} + \vec{J} \qquad [3.4]$$

« Ces relations définissent le vecteur *aimantation* $\vec{M}$ et le vecteur *polarisation magnétique* $\vec{J}$ qui sont des fonctions du vecteur champ magnétique $\vec{H}$. En électrotechnique, l'usage est de ne considérer que la relation *B(H)*. *B* est *l'induction magnétique* représentant la densité de flux magnétique, qui peut être considérée comme l'effet du *champ magnétique* $\vec{H}$, considéré lui comme *l'excitation* à fournir pour provoquer un état magnétique. »[3]

Comme $\vec{M}$ et $\vec{J}$ dépendent de $\vec{H}$, il est classique en électrotechnique de considérer les deux cas suivants :

– le cas des matériaux linéaires (ou « non saturés »). On pose alors :

$$\vec{B} = \mu.\vec{H} = \mu_0.\mu_r.\vec{H} \qquad [3.5]$$

3. Définitions extraites de : Lois d'Aimantation anisotropes et non linéaires : Modélisation et Validation expérimentale, thèse présentée par Thierry Pera à l'Institut polytechnique de Grenoble, 15 mars 1994.

[redacted]

où $\mu_0$ est la perméabilité de l'air ou du vide avec $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}\, H/m$ (SI) et $\mu_r$ est la *perméabilité relative* du matériaux ; $\mu$ est la *perméabilité absolue* du matériaux. Dans ce cas, toutes ces perméabilités sont des *scalaires constants* ;

– le cas des matériaux non linéaires (ou « saturés »). On pose alors :

$$\vec{B} = \mu(H).\vec{H} = \mu_0.\mu_r(|\vec{H}|).\vec{H} \tag{3.6}$$

où $\mu_r$, la perméabilité relative du matériaux et $\mu$, la perméabilité absolue du matériaux sont des *scalaires qui dépendent du module H de* $\vec{H}$.

3.2.1.3. *Equations de Maxwell dans le cadre de l'approximation des états quasi permanents dans les systèmes de conversion d'énergie*

Dans les systèmes de conversion d'énergie, on néglige les dérivées du vecteur $\vec{D}$, car on travaille à des fréquences trop basses pour que ce terme soit sensible. Alors, les équations de Maxwell ont des formes simplifiées seules considérées ici :

– équation du flux magnétique :

$$div\vec{B} = 0 \tag{3.7}$$

– équation de Maxwell-Faraday :

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.8}$$

– équation de Maxwell-Ampère :

$$rot\vec{H} = \vec{j} \tag{3.9}$$

Dans les dispositifs de conversion d'énergie électromécanique, des parties sont fixes (*stator*) et des parties sont mobiles (*rotor*). On s'intéresse donc aux transformations des vecteurs du champ dans des repères mobiles. Ainsi, si l'on considère deux référentiels : un référentiel fixe (*S*) et un référentiel mobile (*S'*), animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel fixe, le champ électrique $\vec{E}'$ perçu dans le repère mobile est donné par la *transformation de Lorentz* :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \tag{3.10}$$

3.2.1.4. *Circuits électriques et macroscopiques globaux : hypothèses pratiques*

L'espace des systèmes de conversion d'énergie n'est pas quelconque ou arbitraire. *Il est structuré par des géométries qui cherchent à optimiser les puissances transportées ou converties* : on cherche à maximiser les différences de potentiel induites ou les forces créées, et à minimiser les pertes. Dans ces conditions, les vecteurs des champs magnétiques sont orientés de façon optimale par les matériaux magnétiques, de même que les courants sont forcés à suivre certains trajets grâce aux conducteurs. On définit ainsi des « circuits magnétiques macroscopiques » et des « circuits électriques » qui organisent fortement les systèmes. Dans ces conditions, on considèrera des grandeurs « macroscopiques » ou « intégrales » qui décriront les phénomènes de façon à la fois simple (ce sont des scalaires) et efficace pour modéliser les phénomènes de conversion d'énergie.

Les circuits magnétiques considérés en pratique sont le plus souvent des « tubes d'induction » matérialisés par des circuits en matériaux ferromagnétiques qui « canalisent » les lignes de champ magnétiques. Les circuits magnétiques possèdent généralement des *entrefers* où se passe l'essentiel des phénomènes, car si les matériaux magnétiques ne sont pas saturés (hypothèse de linéarité), ou peu saturés, alors l'induction $B$ est nulle dans le fer, *c'est dans les entrefers que l'énergie magnétique est stockée et qu'ont lieu les phénomènes de conversion d'énergie.*

Les circuits électriques où circulent les charges sont matérialisés par des matériaux conducteurs. Le plus souvent ces circuits sont « filiformes» où le trajet des courants est imposé et connu. Les circuits « massifs », où les courants ont des trajets plus difficiles à déterminer, doivent faire l'objet d'études spécifiques non traitées ici. Les circuits à commutation sont traités dans le chapitre 1 « Conversion d'Energie électromécanique » de ce premier volume.

### 3.2.2. *Variables macroscopiques et lois intégrales*

Dans la modélisation des machines électriques, on cherche à substituer aux grandeurs vectorielles locales définies au paragraphe 3.2.1.1, difficiles à manipuler, des grandeurs macroscopiques qui sont scalaires, donc plus simples à utiliser.

3.2.2.1. *Les grandeurs macroscopiques utilisées*

Il y a tout d'abord le *flux* (habituellement noté $\phi$ ou $\psi$) *de l'induction magnétique* $\vec{B}$ à travers une surface orientée $\vec{S}$ (le plus souvent la frontière de cette surface est matérialisée par un conducteur : la « spire ») (unité : le weber) :

$$\Phi \text{ ou } \Psi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} \qquad [3.11]$$

La *circulation du champ électrique* $\vec{E}$ le long d'un trajet matérialisé par un circuit électrique est la « différence de potentiel » $V_A - V_B$ ou « force électromotrice » $e$, classique en électricité générale :

$$\vec{E} = -\vec{grad}(V)$$

donc (unité : le volt ($V$)):

$$e = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} \quad [3.12]$$

La *circulation de l'excitation magnétique* $\vec{H}$ le long d'un trajet (circuit magnétique) est la « différence de *potentiel magnétique scalaire*» $U_A - U_B$ (on dit souvent « potentiel scalaire », sans préciser « magnétique ») :

$$\vec{H} = -\vec{grad}(U)$$

donc (unité : l'ampère) :

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{H}.\vec{dl} \quad [3.13]$$

L'*intensité du courant électrique I* est le flux du vecteur intensité de courant $j$ à travers une surface $\vec{S}$ (le plus souvent, la section transversale d'un conducteur) (unité : l'ampère) :

$$\iint_S \vec{j}.\vec{dS} = I \quad [3.14]$$

3.2.2.2. *Les équations de Maxwell sous forme intégrale : conservation du flux et théorème d'Ampère*

Nous traiterons d'abord le cas de l'intégration des équations locales dans des circuits simples. En particulier, nous supposerons que les courants circulent dans des « conducteurs filiformes ».

3.2.2.2.1. La conservation du flux

Nous considérons ici des conventions où le flux positif est le « flux sortant ». Sous forme intégrale, l'équation [3.7] de Maxwell énonce que le flux (total) de l'induction magnétique à travers une surface fermée est nul : on dit que le flux est

« conservatif ». Pour cela, on écrit la définition du flux à travers une surface fermée (on le note $\Phi$), on applique la formule d'Ostrogradski et on utilise la loi [3.7] :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} = \iiint_V (div\vec{B})d\tau = 0 \text{ car } div\vec{B} = 0 \qquad [3.15]$$

On note que dans ce théorème, le flux considéré en chaque point de la surface est « sortant ».

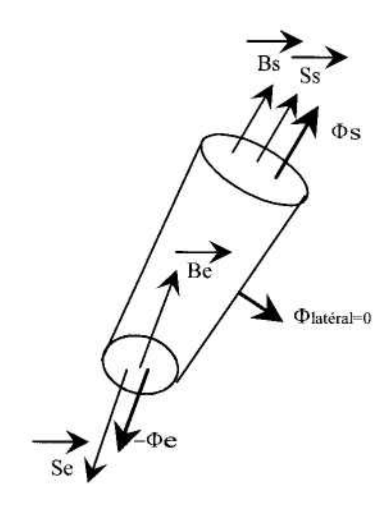



**Figure 3.1.** *Tube d'induction*

En pratique, on utilise souvent le flux à travers une surface particulière qui est le « tube d'induction » (en fait, un « circuit magnétique fondamental », voir figure 3.1) : on distingue alors :

– le flux à travers la surface d'entrée, que l'on note $-\phi_e$ (signe « – » car « entrant »),

– le flux à travers la surface latérale, qui est nul car le produit scalaire $\vec{B}.d\vec{S}$ est nul,

– le flux à travers la surface de sortie : $\phi_s$.

Alors, la conservativité du flux impose : $\phi_e = \phi_s$.

3.2.2.2.2. Le théorème d'Ampère

Ce théorème se déduit de l'équation [3.9] : on écrit la circulation du vecteur $H$ le long d'un circuit (en pratique un « circuit magnétique ») et on applique la formule de Stokes. On retrouve alors la définition du courant.

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = \iint_S (rot\vec{H}).d\vec{S} = \iint_S \vec{j}.d\vec{S} = \sum I \qquad [3.16]$$

3.2.2.3. *Force magnétomotrice et perméance superficielle*

La force magnétomotrice et la perméance superficielle sont des outils très utilisés pour modéliser de façon efficace les machines électriques.

3.2.2.3.1. Force magnétomotrice (FMM)

Nous considérons la géométrie suivante : *un tube d'induction élémentaire dans un entrefer de machine* (figure 3.2). Il s'agit d'un circuit magnétique particulier qui est un tube d'induction situé dans l'entrefer entre deux armatures (stator et rotor) séparées par un entrefer. Le tube d'induction est de longueur $e$ (entrefer), de largeur $dx = R.d\xi$ et de profondeur $L$. La figure 3.2. est une coupe et la profondeur $L$ n'est pas indiquée. L'induction $\vec{B}$ traverse donc une section élémentaire dont l'aire est $dS = R.L.d\xi$ . Nous choisirons ainsi *le sens conventionnel positif* : le champ ($\vec{B}$ ou $\vec{H}$) va de l'armature interne, indicée $r$ (le rotor) vers l'armature externe, indicée $s$ (le stator).

*Par définition, la force magnétomotrice* $F$ (notée aussi $\Theta$ par certains auteurs, et appelée « solénation »), qui est, en dernière analyse, créée par les courants (ou des aimants), est *la différence de potentiel scalaire entre les deux armatures* :

$$F = U_r - U_s = \int_r^s \vec{H}.d\vec{l} \qquad [3.17]$$

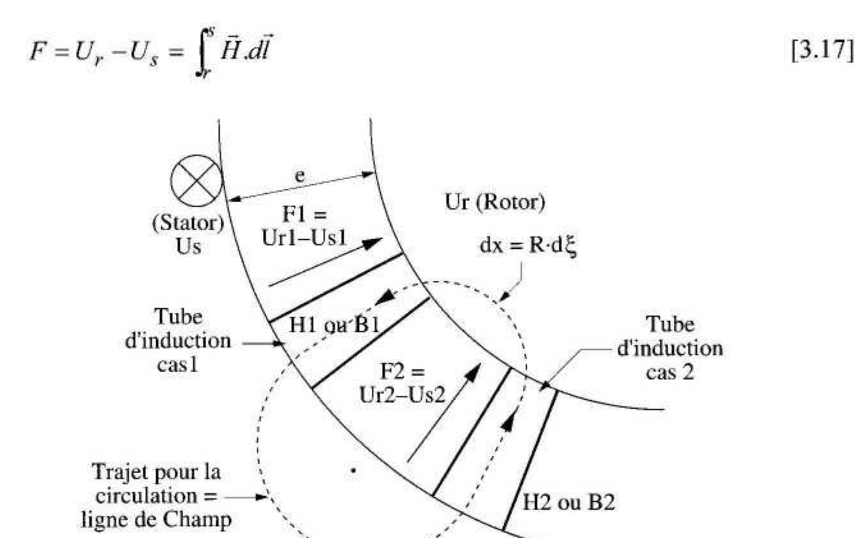



**Figure 3.2.** *Le circuit magnétique élémentaire dans un entrefer de machine*

Dans cette géométrie, *le flux élémentaire* qui traverse le tube d'induction a une expression qui se simplifie, car les vecteurs $\vec{B}$ et $d\vec{S}$ sont colinéaires :

$$d\Phi = \vec{B}.d\vec{S} = B.dS$$

Comme nous avons fait l'hypothèse que l'entrefer est petit, nous admettons que la section $dS$ d'un tube d'induction est constante. En outre, les modules des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont constants le long de l'entrefer. En effet, comme le flux est conservatif, l'amplitude de l'induction $\vec{B}$ est aussi constante le long du tube, et comme on est dans l'air où $\vec{B} = \mu_0.\vec{H}$, l'amplitude de $\vec{H}$ est aussi constante le long de la ligne de champ dans l'entrefer. Dans ces conditions, la circulation de $\vec{H}$ dans l'entrefer vaut : $\int_r^s \vec{H}.d\vec{l} = \int_r^s H.dl$, et donc, en pratique :

$$F = H.e \tag{3.18}$$

3.2.2.3.2. Note sur les signes

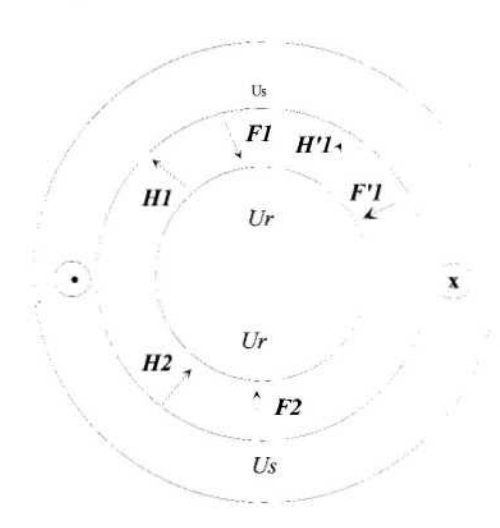



**Figure 3.3.** *Définition des forces magnétomotrices*

Si le sens de $\vec{H}$ va effectivement du rotor vers le stator (cas indicé *1* dans les figures 3.2 et 3.3), la force magnétomotrice vaut :

$$F_1 = H_1.e \tag{3.19}$$

Si le sens de $\vec{H}$ va du stator vers le rotor (cas indicé 2 dans les figures 3.2 et 3.3), la force magnétomotrice vaut :

$$F_2 = -H_2.e \qquad [3.20]$$

3.2.2.3.3. Perméance et perméance superficielle

*La perméance*

Nous voulons écrire des formules du type : $\phi = P.F$. Dans le cas du tube d'induction, le flux qui circule est un flux élémentaire :

$$d\phi = B.dS = \mu_0.H.dS = H.e.\mu_0.\frac{dS}{e} \qquad [3.21]$$

Nous reconnaissons la force magnétomotrice $F = H.e$ et nous voyons qu'il est possible de définir une *perméance élémentaire* :

$$dP = \frac{\mu_0}{e}.dS \qquad [3.22]$$

telle que :

$$d\phi = dP.F \qquad [3.23]$$

*La perméance superficielle*

En pratique, on préfère utiliser la *perméance superficielle* qui est définie par :

$$p = \frac{dP}{dS} \qquad [3.24]$$

car alors les équations [3.21] et [3.23] donnent la *formule fondamentale*, qui permet de calculer l'induction :

$$B = p.F \qquad [3.25]$$

Nous interprétons le résultat [3.25] : *la perméance décrit les effets de la géométrie de la machine permettant de déterminer l'induction à partir de la force magnétomotrice F, qui nous le verrons, est imposée par la distribution de courant.* Une expression générale de la perméance superficielle est :

$$p = \frac{\mu_0}{e} \qquad [3.26]$$

3.2.2.3.4. La composante normale de l'induction

Les trajets considérés en pratique pour appliquer le théorème d'Ampère sont toujours les lignes de champ, et dans l'entrefer, elles sont normales au fer. C'est pourquoi, quand nous considérons $\vec{B}$, nous considérons en fait *la composante normale de l'induction*. Habituellement, la composante tangentielle est faible et nous ne la prenons pas en compte.

### 3.2.3. *Le théorème de Faraday pour les circuits filiformes*

Le théorème de Faraday est fondamental pour décrire la conversion d'énergie électromécanique. Nous rappelons les résultats essentiels dans le cas des circuits filiformes, illustrés par l'exemple, simple mais bien représentatif, de la figure 3.4.

Un circuit électrique « inducteur », parcouru par un courant $i_1$ crée un champ magnétique canalisé par un circuit magnétique en fer. Il crée ainsi un champ magnétique $B_1$ uniforme dans un espace de longueur $L_1$ et de largeur $L_0$. Un deuxième circuit électrique, dit « induit », est formé de deux rails conducteurs, écartés de la largeur $L$, connectés à une source de force électromotrice $u$. Le circuit électrique est fermé par un conducteur mobile, de « longueur utile » $L$ (longueur effectivement parcourue par le courant $i_2$), animé d'une vitesse $\vec{v}$. Il est parcouru par un courant $i_2$. Celui-ci crée un champ $B_2$ et l'on note $\vec{B}$ le champ résultant : $B = B_1 + B_2$. Quelle est la force électromotrice induite par le champ $\vec{B}$ sur le conducteur de longueur $L$ ? $\vec{B}$ peut varier dans le temps et dans l'espace, car les courants $i_1$ et $i_2$ peuvent varier, et le conducteur $L$ est mobile et son mouvement lui fait « couper » les lignes d'induction de $\vec{B}$.

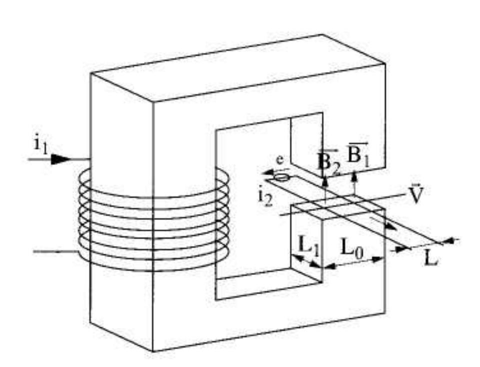



**Figure 3.4.** *Conducteur plongé dans un champ magnétique*

[redacted]

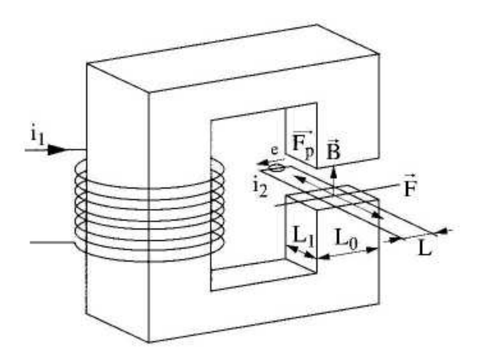



**Figure 3.5.** *Force appliquée sur un conducteur placé dans un champ magnétique*

Le conducteur est situé dans un repère mobile de vitesse $\vec{v}$ par rapport au repère fixe où se situe le champ $\vec{B}$. Il subit donc un champ électrique $\vec{E}'$ donné par la formule de Lorentz : $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$. On écrit la différence de potentiel créée par $E'$ sur le conducteur mobile $L$ :

$$e = \int_C \vec{E}'.d\vec{l} = \int_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).d\vec{l} \qquad [3.27]$$

On peut, par des calculs analytiques qui ne seront pas détaillés ici (voir la bibliographie, section 3.7), montrer que les deux termes de [3.27] peuvent être réécrits comme suit :

$$e = \iint_S (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}).d\vec{S} - \int_C \frac{\delta \vec{S}_c}{dt}.\vec{B}$$

Le premier terme est dû à la variation du champ $\vec{B}$. Le deuxième terme décrit l'effet du *mouvement du conducteur dans le champ* $\vec{B}$ on voit qu'il s'agit de l'effet de la variation de la position du circuit, variation que l'on écrit à l'aide de la variation d'un flux fictif appelé « flux coupé » noté $\delta\Phi_c$, engendré par le champ $\vec{B}$ dans une « surface balayée » dont la valeur élémentaire est notée avec l'indice $c$ : $\delta\vec{S}_c$. Ces deux termes peuvent être regroupés sous le terme de « variation de flux », que celle-ci soit due à la variation du vecteur $\vec{B}$ ou à la variation (au sens vectoriel) de la surface, $\vec{S}$. Aussi, le théorème classique de Faraday, appliqué aux circuits

filiformes, s'énonce ainsi, les notations utilisées cherchant à distinguer les deux types de variations[4] :

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\delta \Phi_c}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad [3.28]$$

Certains auteurs, pour préciser que la dérivée du flux intervenant dans la dernière expression contient bien les deux types de variations, introduisent une notation avec des $D$ majuscules :

$$e = -\frac{D\Phi}{Dt}$$

REMARQUE.– Le flux défini par la formule générale [3.11] désigne aussi bien le flux induit dans une spire que dans le flux total embrassé par un enroulement contenant plusieurs spires, car c'est le terme $d\vec{S}$ qui prend en charge la géométrie du circuit et qui désigne la surface sur laquelle s'appuie chaque spire du circuit. Mais dans la suite, nous utiliserons généralement le symbole $\Phi$ pour désigner le flux dans une seule spire, et $\psi$ pour désigner le flux total embrassé par un enroulement. Ainsi, si un enroulement contient $N$ spires en série qui subissent chacune un flux $\Phi_n$, on aura :

$$\psi = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n \qquad [3.29]$$

### 3.2.4. *Conversion d'énergie*

#### 3.2.4.1. *Energie magnétique, force et couple électromagnétique (convention : « moteur »)*

Un chapitre de cet ouvrage (*conversion électromécanique d'énergie*) étant consacré à la question de la conversion électromécanique d'énergie, nous ne présentons ici que des résultats abrégés, surtout destinés à préciser les conventions et les notations. Nous considérons un circuit de principe, comme celui qui est illustré par la figure 3.5. Nous utilisons la convention « moteur ». D'une part, nous admettons

4. Dans nos notations, une variation d'une grandeur, désignée par $x$ en général, est notée $\delta x$, s'il s'agit « d'une petite variation », et $dx$, si cette petite variation est également une « différentielle totale exacte ». Le symbole $\partial x$ est utilisé classiquement pour les dérivées partielles.

[redacted]

que nous pouvons écrire la loi aux mailles et la loi d'Ohm (la résistance du circuit est alors $R$), complétées par la loi de Faraday appliquée aux circuits filiformes :

$$u = R.i - e = R.i + \frac{d\psi}{dt} \qquad [3.30]$$

Pendant une durée infinitésimale $dt$, la variation d'énergie injectée dans le système est donnée par : $\delta W_e = u.i.dt$ et la variation de l'énergie mécanique est $\delta W_{méca} = C.dx$. Pendant cette même durée, les pertes sont $\delta W_J = R.i^2.dt$ (pertes irréversibles par effet Joule). Nous admettons le premier principe de la thermodynamique adaptée au cas des moteurs électriques, c'est-à-dire le principe de la conservation d'énergie (figure 3.6).

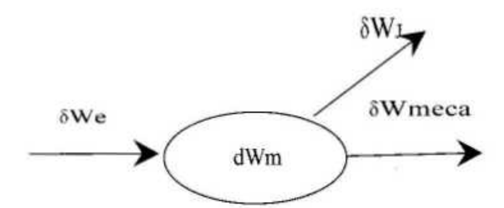



**Figure 3.6.** *Bilan des énergies élémentaires (convention : moteur)*

Les grandeurs $\delta W_e, \delta W_{méca}, \delta W_J$ sont des « petites variations » et $dW_m$ est une « petite variation » de l'énergie magnétique stockée dans les bobinages $W_m$; c'est en même temps une « différentielle totale exacte ». Le bilan des énergies s'écrit :

$$dW_m = \delta W_e - \delta W_J - \delta W_{méca} \qquad [3.31]$$

On peut montrer que $dW_m$ a pour expression :

$$dWm = i.d\psi - F.dx \qquad [3.32]$$

$W_m$ une fonction d'état qui dépend de deux variables d'état, $\psi$ et $x$ : $W_m(\psi, x)$. Ses dérivées partielles vérifient :

– *dérivée effectuée à position constante* :

$$\left.\frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial \psi}\right|_{x=cste} = i$$

Elle permet de calculer l'énergie magnétique par l'intégrale suivante qui est effectuée *pour une position x donnée* (voir figure 3.7) :

$$W_m = \int_0^{\psi} i(\psi', x).d\psi' \qquad [3.33]$$

– *dérivée effectuée à flux constant* :

$$\left.\frac{\partial W_m(\psi, i)}{\partial x}\right|_{\psi=cste} = -F$$

Elle nous donne une première expression de la force.

3.2.4.2. *Introduction de la co-énergie ; nouvelle expression de la force*

En pratique, le calcul de $W_m$ n'est pas toujours aisé. En effet, il est fréquent que l'on écrive les variables magnétiques, comme le flux, en fonction des courants et l'on souhaite que le courant soit variable d'état (et non le flux). On manipule l'intégrale qui définit $W_m$ (intégration par parties), ce qui est équivalent à une « transformation de Legendre », comme il est classique en thermodynamique. On obtient alors :

$$W_m = i.\psi - \int_0^{i} \psi(i', x).di'$$

et on définit la *co-énergie magnétique* par la quantité :

$$W_{cm} = \int_0^{i} \psi(i', x).di' \qquad [3.34]$$

On peut donc aussi poser : $W_m + W_{cm} = i.\psi$. Alors, on utilise la définition de $dW_m$, équation [3.32], et l'on obtient :

$$dW_{cm} = d(i.\psi) - dW_m = \psi.di + F.dx \qquad [3.35]$$

$W_{cm}$ *est aussi une fonction d'état* qui dépend de deux variables d'état : $i$ et $x$. Ses dérivées partielles vérifient :

– dérivée effectuée à position constante :

$$\left.\frac{\partial W_{cm}(i, x)}{\partial i}\right|_{x=cste} = \psi \qquad [3.36]$$

– dérivée effectuée à courant constant :

$$\left.\frac{\partial W_{cm}(i,x)}{\partial x}\right|_{i=cste} = F \qquad [3.37]$$

La première dérivée partielle confirme que l'on peut déterminer la co-énergie magnétique $W_{cm}$ par l'intégrale [3.34] effectuée pour une position $x$ donnée (figure 3.7).

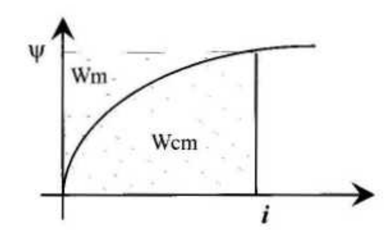



**Figure 3.7.** *Energie et co-énergie magnétiques*

La deuxième dérivée partielle [3.37], nous donne l'expression utile de la force : $F = \partial W_{cm}(i,x)/\partial x$. L'usage de la co-énergie est considéré comme plus aisé « dans les cas difficiles » que l'usage de l'énergie magnétique. La co-énergie n'a pas de signification physique directe, mais, comme toutes les fonctions introduites par des transformations de Legendre, *elle contient, sur le système, les mêmes informations physiques que la fonction d'état initiale, l'énergie magnétique*.

3.2.4.3. *Cas des machines à aimant*

L'usage de la co-énergie pour les machines à aimant pose des problèmes spécifiques. On peut contourner ce problème en adoptant, comme il est classique, le « modèle ampérien » qui substitue à l'aimant une bobine à air équivalente, alimentée par un courant constant. Celle-ci crée les mêmes lignes de champ que l'aimant à l'extérieur de l'aimant (pas à l'intérieur, évidemment).

3.2.4.4. *Cas des matériaux linéaires, confusion entre l'énergie magnétique et la co-énergie magnétique, calcul pratique des couples électromagnétiques*

L'hypothèse de linéarité des matériaux est très fréquemment faite lorsque l'on cherche à modéliser les machines électriques en vue de leur commande (matériaux ferromagnétiques non saturés). On peut poser alors que le flux est proportionnel au courant et l'on définit les inductances (propres ou mutuelles) qui sont constantes en fonction des courants, mais qui peuvent dépendre de la variable de position, notée en général $x$ (unité de $L$ : le henry ($H$)) :

$$\psi(x,i) = L(x).i \qquad [3.38]$$

Alors, on peut écrire l'énergie magnétique sous sa forme initiale (intégrale calculée à $x$ = constante) :

$$W_m(\psi,x) = \int_0^{\psi} i(\psi',x).d\psi' = \int_0^{\psi} \frac{\psi'}{L(x)}.d\psi' = \frac{1}{2}.\frac{\psi^2}{L(x)} \qquad [3.39]$$

Et l'on écrit également la co-énergie magnétique sous sa forme initiale :

$$W_{cm}(i,x) = \int_0^{i} \psi(i',x).di' = \int_0^{i} L(x).i'.di' = \frac{1}{2}.L(x).i^2 \qquad [3.40]$$

A cause de la proportionnalité entre le flux et le courant (voir équation [3.38]), on voit que la co-énergie peut aussi s'écrire :

$$W_m = \frac{1}{2}.\frac{\psi^2}{L(x)} = \frac{1}{2}.\frac{\left(L(x).i\right)^2}{L(x)} = \frac{1}{2}.L(x).i^2 = W_{cm} \qquad [3.41]$$

Nous observons que dans le cas de l'hypothèse de linéarité, l'énergie magnétique et la co-énergie magnétique ont même valeur (voir figure 3.8).

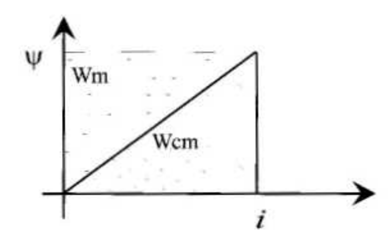



**Figure 3.8.** *Energie et co-énergie magnétiques dans le cas linéaire*

Très souvent, à cause de l'égalité de $W_m$ et $W_{cm}$, par abus de langage, on appelle l'expression $\frac{1}{2}.L(x).i^2$ « énergie magnétique » (dont les variables d'état devraient être le flux et la position), alors qu'en toute rigueur, il s'agit de la co-énergie magnétique, c'est-à-dire une fonction d'état dont les variables d'état sont le courant

et la position. Cela permet d'écrire, abusivement : $C = \frac{\partial W_m}{\partial x}\Big|_{i=cste}$, alors qu'en réalité c'est la co-énergie magnétique $W_{cm}$ qui devrait être utilisée. Mais cela permet d'écrire :

$$C = \frac{1}{2}.\frac{\partial L(x)}{\partial x}.i^2 \qquad [3.42]$$

ce qui est correct et très pratique. On utilise le plus souvent *des généralisations à des machines tournantes polyphasées* (notation utilisée ici : $n$ enroulements) et où la position est représentée par l'angle de rotation $\theta$, alors $W_{cm}(i,\theta)$ s'écrit :

$$W_{cm} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj}(\theta).i_k.i_j = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} L(\theta) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix}$$

d'où l'expression la plus utilisée pour calculer le couple électromagnétique :

$$C = \frac{\partial W_{cm}(i,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{bmatrix}.\left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right].\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} \qquad [3.43]$$

3.2.4.5. *Force sur un conducteur placé dans le vide et subissant un champ B : loi de Laplace*

La forme vectorielle générale de la loi de Laplace est :

$$\vec{F} = i(d\vec{l} \times \vec{B})$$

En règle générale, la loi de Laplace s'applique peu aux machines électriques, car le plus souvent, les conducteurs sont placés dans des encoches plongées elles-mêmes dans des matériaux magnétiques (fer). Les formules utilisant l'énergie magnétique ou la co-énergie (c'est-à-dire des bilans d'énergie) s'imposent. Cela est particulièrement vrai pour les actionneurs spéciaux fonctionnant en régime fortement saturé (machines à réluctance variable, par exemple).

Cependant, la loi de Laplace peut être appliquée lorsque les conducteurs sont collés en surface (cas de certains petits moteurs). On peut être amené à utiliser aussi la loi de Laplace (et cela est très souvent admis) lorsque l'on définit un *modèle équivalent* de la machine à l'aide de conducteurs collés sur le fer (donc, situés dans l'entrefer). Ce modèle équivalent a l'avantage d'être simple et il est habituellement correct dans le cadre de l'hypothèse de linéarité pour ce qui concerne le champ principal. Par contre ce modèle équivalent est inopérant pour certains problèmes comme : effet de la saturation, et effet des fuites.

## 3.3. Structure des machines tournantes à courant alternatif : description par les forces magnétomotrices

### 3.3.1. *Structures générales*

Nous allons décrire la géométrie (mécanique) et la répartition des champs (magnétiques) dans les machines électriques à courant alternatif classiques.

3.3.1.1. *On cherche à maximiser les forces et les différences de potentiel (ddp)*

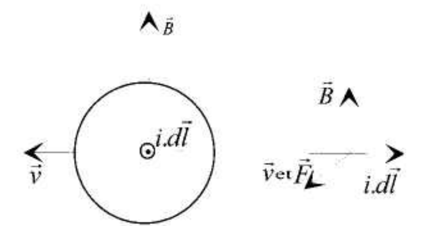



**Figure 3.9.** *Dispositions relatives des vecteurs (induction, élément de courant, vitesse)*

La structure géométrique des machines classiques est particulière. En effet, elle cherche à optimiser ses performances ; il faut maximiser les forces et les différences de potentiel. Cela impose des formes géométriques très simples. En effet, l'optimisation désirée exige que les trois vecteurs suivants soient orthogonaux entre eux (voir figure 3.9) : l'induction : $\vec{B}$, l'élément de courant : $i.d\vec{l}$, la vitesse linéaire des conducteurs : $\vec{v}$. Pour imposer ces propriétés, on construit des machines qui ont les caractéristiques suivantes :

– les champs sont créés par des courants situés dans des encoches, ou par des aimants ;

– les armatures ont des géométries de type cylindrique, pour que les lignes de champ puissent se refermer avec un minimum de fuites (les « fuites » sont définies

[redacted]

au paragraphe 3.3.1.3.3). Dans ces machines, les champs sont « radiaux » et les courants sont « axiaux » ;

– les armatures sont en fer pour imposer la direction des lignes de champ et augmenter l'amplitude de l'induction. Grâce à la perméabilité très grande du fer, l'induction est orthogonale au fer dans l'entrefer. Egalement, l'excitation H est nulle dans le fer, et l'on n'étudie que le champ dans l'entrefer où les équipotentielles magnétiques sont des cylindres concentriques ;

– les conducteurs sont en cuivre (onéreux, aussi, on utilise l'aluminium si l'on doit baisser les coûts) pour que leurs résistances soient les plus faibles possibles (minimisation des pertes Joule) ;

– les entrefers sont petits pour maximiser l'induction dans l'entrefer et minimiser les fuites ;

– les courants sont placées dans des encoches placées près de la surface du fer, dans le cas des machines « à pôles lisses », où le rotor est cylindrique, voir figures 3.10 et 3.14 ou dans des spires bobinées autour des pièces polaires dans le cas des « machines à pôles saillants », où le rotor n'est pas cylindrique, mais possède deux axes de symétries (voir figure 3.11) ;

– les parties en fer sont habituellement réalisées avec des tôles minces, empilées et isolées entre elles pour minimiser les courants de Foucault, le fer étant d'une qualité spéciale (minimisation des pertes ferromagnétiques) ;

– la enroulement statoriques sont généralement *triphasées*, car il s'agit du meilleur choix économique (minimisation des masses de fer et de cuivre nécessaires pour réaliser une machine de puissance et de performances données) ;

– les machines sont classiquement optimisées pour un point de fonctionnement appelé « point nominal », qui est le plus souvent imposé par l'échauffement maximum autorisé lors d'un fonctionnement en régime permanent de très longue durée.

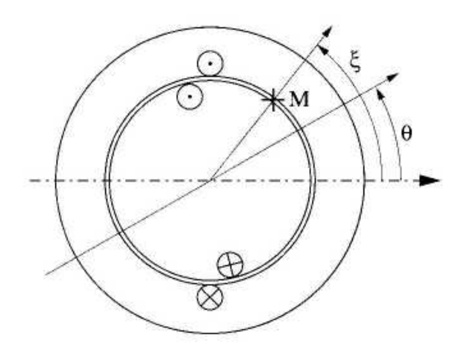



**Figure 3.10.** *Machine monophasée à pôles lisses*

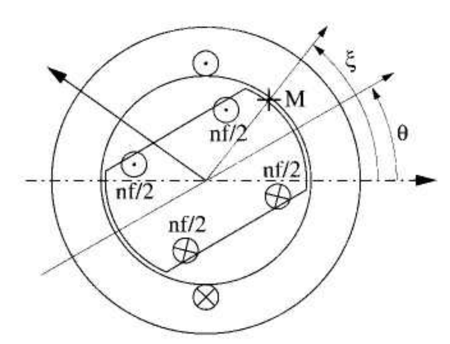



**Figure 3.11.** *Machine monophasée à pôles saillants*

REMARQUE.– Il existe des variantes :

– dans certaines machines les bobinages d'une armature (dite « inducteur ») peuvent être remplacés par des aimants. Les aimants ont des avantages par rapport aux bobinages : petits volumes, pas de source d'alimentation en courant des bobinages, pas de pertes Joule. Les aimants ont des inconvénients : l'excitation est constante, et on ne peut la régler. Ils peuvent être sensibles à la température et subir des effets de désaimantation. Quand les aimants sont « déposés » en surface, la machine est similaire à une machine à pôles lisses (avec un assez grand entrefer, voir figure 3.12). Quand les aimants sont « enterrés », la machine est assimilée à une machine à pôles saillants ;

– les *machines à déplacements linéaires* existent, mais elles ont beaucoup de fuites ; cela leur imposent des performances limitées et leur usage est réduit à des applications particulières (exemple, vérin à « débattement limité »).

– il existe des machines « disques », qui sont géométriquement « duales » des machines cylindriques : courants axiaux et champ longitudinal.

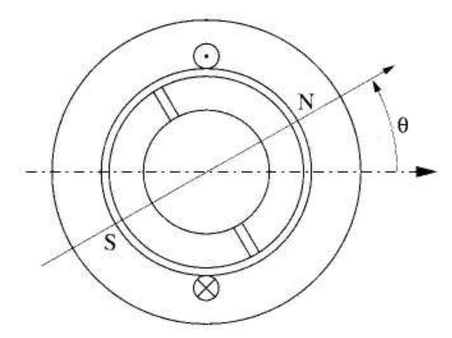



**Figure 3.12.** *Machine monophasée à aimants*

3.3.1.2. *Les structures géométriques élémentaires*

3.3.1.2.1. Le circuit magnétique de base : des cylindres concentriques

Nous venons de voir que les machines électriques ont généralement des géométries à symétries cylindriques (figure 3.13). Elles sont composées par :

– une armature cylindrique creuse, le *stator*, fixe. Son diamètre intérieur est noté $D_2$ ;

– une armature cylindrique pleine, le *rotor*, mobile autour de son axe, situé à l'intérieur du stator. Son diamètre extérieur est noté $D_1$ ;

– les axes des deux armatures sont confondus. Le diamètre $D_1$ est de peu inférieur au diamètre $D_2$. La quantité $e = D_2 - D_1$ est appelée *l'entrefer*. Sa valeur est très inférieure à celles de $D_1$ ou $D_2$. On appelle *diamètre d'entrefer* la valeur moyenne de $D_1$ et $D_2$ : $D = (D_1 + D_2)/2$. Dans de nombreux calculs, *on confond les trois valeurs* $D$, $D_1$ et $D_2$ qui sont très proches. La *longueur* des armatures est notée $L$. La figure 3.14 donne un schéma en perspective définissant $L$.

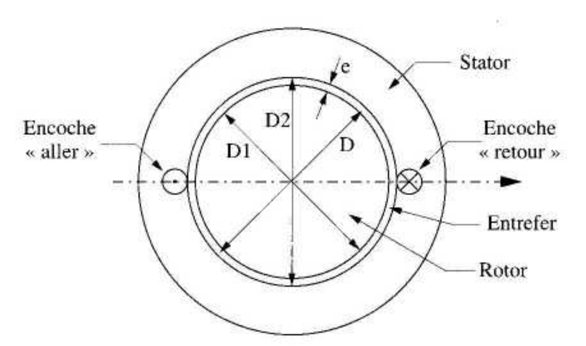



**Figure 3.13.** *Coupe d'une machine tournante : géométrique cylindrique et enroulement concentré diamétral*

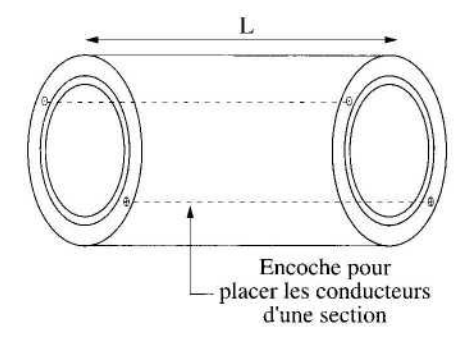



**Figure 3.14.** *Géométrie de la machine : les trois dimensions*

Les phénomènes physiques importants (stockage de l'énergie magnétique, conversion d'énergie électromécanique) ont lieu dans l'entrefer qui est une « couronne d'air ».

3.3.1.2.2. Le circuit électrique de base : la section diamétrale

L'enroulement élémentaire est une *section* (figure 3.15), c'est-à-dire une spire de $n_1$ conducteurs placés dans *une paire d'encoches*. Cette section a des *parties actives* de longueur $L$, qui créent le champ utile pour la conversion d'énergie, et *des têtes de bobines* qui permettent aux courants de se refermer. Les têtes de bobine sont le siège de champs de fuite qui ne participent pas à la conversion d'énergie.

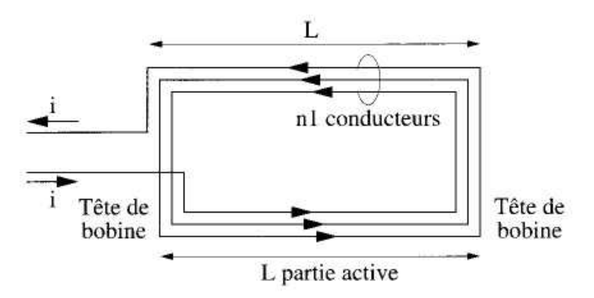



**Figure 3.15.** *Section*

3.3.1.3. *Propriétés physiques et géométriques mises à profit pour la démarche débouchant sur la modélisation des machines électriques*

3.3.1.3.1. Idées générales

La description physique et la modélisation des machines électriques sont intimement liées. La description *anticipe* sur les hypothèses qui seront nécessaires pour la modélisation, et la modélisation est censée rendre compte des phénomènes mis en jeu par la description. *On peut affirmer que les machines sont construites pour présenter, au moins approximativement, les modèles qu'on leur applique : c'est la problématique des « machines bien construites ».*

La « *description physique en vue de leur modélisation appliquée à la synthèse de lois de commande* » fera nécessairement appel à des hypothèses simplificatrices et à des idéalisations nécessaires pour que la modélisation présente un bon compromis entre la précision et la simplicité. Nous allons discuter de ces questions.

*La démarche*

La *perméance* permet d'écrire l'induction en fonction de la *force magnétomotrice*. Connaissant l'induction, on peut ensuite déterminer le flux dans les enroulements,

donc les forces électromotrices induites (loi de Faraday), donc la puissance convertie, et enfin, le couple. *Le point de départ de cette démarche concerne ainsi la détermination des forces magnétomotrices créées par les courants.*

3.3.1.3.2. Les hypothèses simplificatrices classiques

Nous considérons surtout des « armatures triphasées », c'est-à-dire les stators des machines synchrones et asynchrones, et les rotors des bobinés des machines synchrones. L'exemple d'une armature monophasée concerne l'excitation au rotor d'une machine synchrone. La modélisation des machines électriques à courant alternatif s'appuie classiquement sur trois hypothèses fondamentales :

– *la symétrie* : les *trois phases d'une armature sont identiques* : mêmes structures, mêmes nombres de conducteurs, donc mêmes valeurs des paramètres. Les trois phases sont simplement *décalées* dans l'espace, ces décalages valant l'angle $2\pi/3$ (ou, comme nous le verrons aux paragraphes 3.3.3.2 et 3.3.3.3, un même sous-multiple de $2\pi/3$ : $2.\pi/3.p$, où *p est le nombre de paires de pôles*). Quand une armature est monophasée, elle doit présenter deux axes de symétrie orthogonaux : l'axe « longitudinal » et l'axe « transversal » ;

– *l'hypothèse du premier harmonique* : la distribution du champ dans l'entrefer (en pratique, l'amplitude de la composante normale de l'induction) est une *fonction purement sinusoïdale de la variable de position, qui sera notée* $\xi$. Cela suppose que les « harmoniques d'espace » ont été éliminés par la construction : c'est le rôle des techniques de filtrage physiquement réalisables (avec les contraintes technico-économiques : facilité de la réalisation industrielle), appelées « distribution » et « raccourcissement ». Cela aura pour première conséquence que les mutuelles inductances (associées au champ principal) entre deux enroulement seront des *fonctions du cosinus de l'angle* entre les axes de ces enroulements. Les machines sont conçues et optimisées en vue de leur comportement en régime permanent. Dans ce cas, les machines doivent être alimentées par des *courants sinusoïdaux du temps* (variable : $t$). En effet, dans les « machines bien construites », les *champs ont (*en réalité, *doivent avoir) une répartition sinusoïdale de l'espace* (variable : $\xi$). Il en résulte que les forces électromotrices induites sont aussi sinusoïdales du temps. *Le couple ainsi créé est constant* ;

– *l'hypothèse de linéarité* : cette hypothèse permet, *in fine*, d'écrire que le *flux embrassé par un enroulement est proportionnel au courant qui le crée*, le coefficient de proportionnalité (global) étant *l'inductance* (propre ou mutuelle), qui est un paramètre considéré comme constant quand les courants varient. C'est la conséquence de la proportionnalité entre l'induction et la force magnétomotrice, proportionnalité écrite au moyen d'un coefficient constant (local) : *la perméance superficielle*. L'hypothèse physique à la base de ces propriétés est : les *parties en fer des circuits magnétiques ne sont pas saturées*. On se place donc dans la partie linéaire des caractéristiques magnétiques. C'est cela qui permet d'écrire les relations linéaires précitées entre les flux et les courants. Cette hypothèse est la première que

l'on cite, mais pour avoir des équations utilisables pour la conception des commandes, on est amené, en fait, à élargir cette hypothèse et supposer d'autres simplifications. Ainsi, *on néglige les pertes fer* (ou mieux « ferromagnétiques »), *l'effet de peau* et les effets de la *température*.

De façon générale, et pour parler sans détour, on est amené à faire les hypothèses *ad hoc* qui maintiennent dans *un cadre de simplicité* jugée nécessaire par le concepteur pour calculer ses commandes. Ces hypothèses sont celles que l'on pose habituellement dans le cadre de la modélisation de Park. Dans les études qui suivent, l'hypothèse de linéarité entraîne des propriétés systématiquement utilisées :

– la perméabilité dans le fer est infinie et l'excitation $H$ est nulle dans le fer ;

– dans l'entrefer, l'induction, qui vérifie $\vec{B} = \mu_0.\vec{H}$ , est orthogonale au fer, et l'on confond $\vec{B}$ avec sa composante normale.

3.3.1.3.3. Flux principal/flux de fuite

Lorsque nous parlons habituellement du « champ », il s'agit « de l'induction », ou *plus précisément, de la composante normale de l'induction* dans l'entrefer, donc du champ associé *aux lignes de champ traversant l'entrefer*, qui sont donc communes aux armatures statoriques et rotoriques et *qui participent ainsi à la conversion d'énergie, donc à la création d'un couple.* C'est de ce champ dont il est question dans les paragraphes précédents (voir les « hypothèses simplificatrices classiques » paragraphe 3.3.1.3.2, par exemple), et que nous appellerons maintenant « *champ principal* ». La géométrie associée est simple : dans l'entrefer (partie essentielle du circuit magnétique considéré), les lignes de champ sont orthogonales au fer (voir la figure 3.16) le champ principal peut alors être déterminé avec un petit nombre de paramètres, principalement : la longueur $L$ de la machine, le diamètre d'entrefer $D$ et l'épaisseur de l'entrefer $e$.

Mais nous devons aussi prendre en compte le « *champ de fuite* ». Il s'agit du champ associé aux lignes de champ qui ne traversent pas l'entrefer, et *qui n'embrassent que l'armature (statorique ou rotorique) qui les a créées*.

Le champ de fuite est difficile à modéliser aussi simplement que le champ principal. En effet, il est associé à une géométrie complexe et la détermination des fuites exige une bonne connaissance de la géométrie des encoches et de têtes de bobines. Par commodité, on admet une modélisation des fuites très simple : on suppose le plus souvent que les fuites ont surtout lieu dans l'air (traversée des encoches, environnement des têtes de bobine), ce qui permet de négliger la saturation. *On supposera donc les paramètres constants*. La figure 3.16 montre symboliquement les géométries respectives du champ de fuite et du champ principal. La figure 3.17 donne des « dimensions typiques » dont il faut surtout retenir que les largeurs des encoches sont beaucoup plus grandes que l'épaisseur de l'entrefer qui

doit être aussi petit que possible. On suppose ainsi que les dimensions relatives des encoches et de l'entrefer font que le champ principal (qui ne traverse que l'étroit entrefer) est grand et que les champs de fuite (qui traversent de larges couches d'air) ont de petites amplitudes (quelques pourcents du champ principal). Toutes ces hypothèses *ad hoc* permettent d'arriver à la conclusion que *les fuites peuvent être modélisées par de petites inductances constantes*, que l'on peut déterminer par des mesures expérimentales ou qui sont données par les constructeurs.

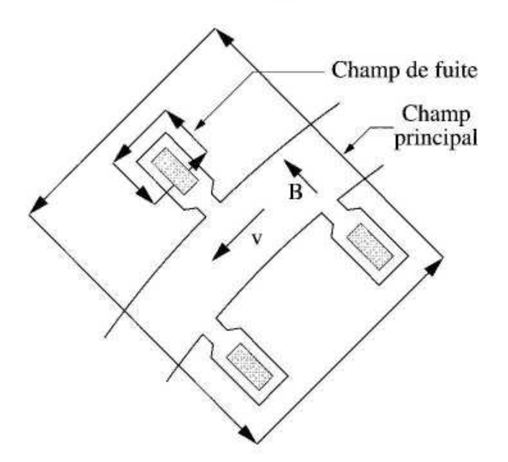



**Figure 3.16.** *Entrefer et encoches : champ de fuite et champ principal (représentation très idéalisée)*

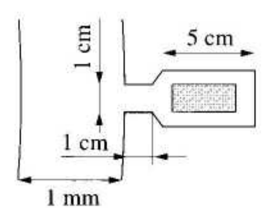



**Figure 3.17.** *Entrefer et encoches : les valeurs des dimensions indiquées sont « typiques » (les dimensions représentées sur ces dessins ne respectent pas les valeurs réelles : l'entrefer devrait être très mince, donc invisible sur les dessins)*

3.3.1.3.4. Usage de l'enroulement diamétral concentré pour la modélisation

Nous verrons (paragraphe 3.3.2.7) que les enroulement réels sont constitués d'un certain nombre de spires ($n$, dans nos notations) réparties dans plusieurs encoches (en nombre noté $m$), *mais nous verrons également que ces enroulements réels peuvent être représentés symboliquement par des « enroulements diamétraux concentrés ».*

C'est, en pratique, *l'enroulement fondamental*, utilisé aussi bien pour la conception que pour la modélisation. Ils sont à la fois physiquement réalisables et sont les plus simples à concevoir et à modéliser. L'enroulement concentré diamétral est constitué d'une section, c'est-à-dire d'une spire de $n_1$ conducteurs placés dans deux encoches séparées par un diamètre (ou écartées d'un angle $\pi$), comme le précise la figure 3.18. Dans cet exemple, l'enroulement est présenté au stator, mais il pourrait tout aussi bien être situé au rotor. Cet enroulement suffit à décrire une phase d'un enroulement qui peut être *monophasé* (et constitué de cette unique phase) ou *polyphasé* (et constitué de plusieurs phases de ce type, identiques, et décalées dans l'espace). Dans la section 3.5, nous décrirons les machines synchrones et asynchrones à l'aide de cet enroulement fondamental.

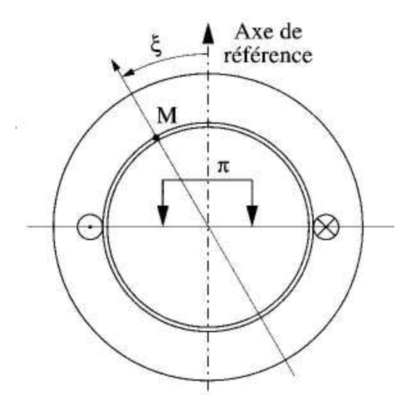



**Figure 3.18.** *L'enroulement fondamental : l'enroulement diamétral concentré de $n_1$ spires situées dans une paire d'encoches*

3.3.1.3.5. Vocabulaire

L'enroulement que nous venons de définir est :

– *diamétral* : car les deux encoches (l'encoche « aller » et l'encoche « retour ») sont situées sur un diamètre (ou l'angle d'ouverture est $\pi$, figure 3.18). Terme opposé : « raccourci » (voir paragraphe 3.3.2.7) ;

– *concentré* : tous les conducteurs sont massés dans ces deux encoches. Terme opposé : « distribué » (voir paragraphe 3.3.2.7) ;

– *monophasé* : l'armature (le stator ou le rotor) contient un seul enroulement. Terme opposé : « polyphasé » (exemple : diphasé, triphasé, hexaphasé, etc., voir paragraphe 3.3.3.1) ;

– *à une seule paire de pôles* (ou « bipolaire ») : si un point courant (noté $M$) se déplace dans l'entrefer en étant repéré par l'angle $\xi$, le champ est une fonction de $\xi$, et cette fonction est *périodique de période* $2.\pi$ (figure 3.23). Termes opposés :

« multipolaire », ou à « $p$ paires de pôles », ou « à $2.p$ pôles » : *alors la périodicité est $2\pi/p$.* Exemples : tétrapolaire (4 pôles = 2 paires de pôles), hexapolaire (6 pôles = 3 paires de pôles) ; voir les paragraphes 3.3.3.2 et 3.3.3.3.

### 3.3.2. *Modélisation à l'aide de l'enroulement diamétral concentré*

#### 3.3.2.1. *Méthodologie*

L'enroulement diamétral présente toutes les propriétés utiles et il peut servir de modèle de base pour la modélisation des machines à courant alternatif classiques. Il faut donc connaître sa modélisation qui est aisée car cet enroulement est très simple. Ensuite, avec lui, *on peut aussi présenter la modélisation approchée « au sens du premier harmonique »* et donner ainsi une première approche de la modélisation des machines synchrones et asynchrones. Enfin, on peut modéliser les enroulement réels des machines et montrer comment *l'enroulement concentré diamétral peut être un schéma équivalent pour les enroulements réels*, moyennant l'utilisation d'un « coefficient de bobinage » (voir paragraphe 3.3.2.7).

#### 3.3.2.2. La géométrie et les propriétés fondamentales

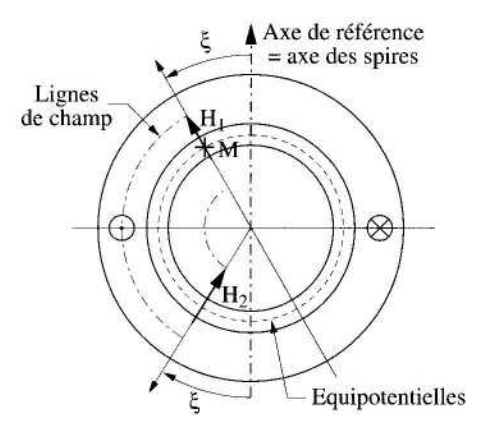



**Figure 3.19.** *Circuit magnétique fondamental*

Le *circuit magnétique fondamental* est composé des deux armatures (stator et rotor) séparées par l'entrefer et alimenté par une section de $n_1$ conducteurs parcourus par un courant $i$. Les lignes de champ ont l'allure indiquée sur la figure 3.19. On considère le champ dans l'entrefer où $\vec{B}$ est orthogonale au fer. Dans l'entrefer, les équipotentielles magnétiques sont des cylindres concentriques. Les encoches voient circuler un courant dont la valeur est $n_1.i$. Les figures précisent les sens des courants.

Les conducteurs constituent *n* spires concentrées dans une paire d'encoches diamétrales. L'axe des spires est pris comme axe de référence. Un point *M* quelconque de l'entrefer est alors repéré par un angle noté $\xi$ (angle du « point courant »). La « règle du tire-bouchon » permet d'orienter les lignes de champ.

On observe qu'avec les *conventions de sens* (figure 3.20), le champ ( $\vec{B}$ ou $\vec{H}$ ) est « entrant » dans la partie inférieure des spires (« pôle sud »), et est « sortant » par la partie supérieure (« pôle nord »).

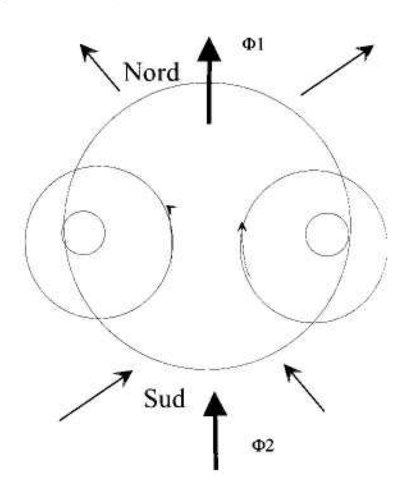



**Figure 3.20.** *Convention des flux sortants ($\Phi_2$) et entrants($\Phi_1$)*

La géométrie des machines classiques présente toujours les mêmes symétries et nous utiliserons les axes de symétrie comme axes de référence (figure 3.20) :

– le *premier axe de symétrie* est l'axe des spires qui définissent l'enroulement : il nous servira comme axe de repère pour mesurer les angles qui définissent les positions ; par exemple, l'angle $\xi$ servira à repérer le point courant *M*, situé dans l'entrefer ;

– le *deuxième axe de symétrie* est un axe orthogonal au précédent : cet axe passe par les deux encoches qui définissent l'enroulement diamétral.

3.3.2.3. *Les grandeurs physiques fondamentales*

Le potentiel scalaire a été défini au paragraphe 3.2.2.1, formule [3.13]. On considère des points situés en dehors des courants. Nous utilisons les notions de force magnétomotrice *F*, et de perméance superficielle *p*, et l'équation associée [3.25] : $B = p.F$ .

[redacted]

3.3.2.4. *Perméance superficielle des machine à pôles lisses et à pôles saillants*

Dans le cas d'une *machine à pôles lisses*, par définition *l'entrefer e est constant* et la perméance superficielle est constante, ce que nous précisons par l'indice 0 (exemple, les machines des figures 3.10 et 3.12) :

$$p = \frac{dP}{dS} = \frac{\mu_0}{e} = p_0 \qquad [3.44]$$

Dans le cas d'une *machine à pôles saillants* (voir les figures 3.11 et 3.21), *e désigne en fait la longueur des tubes de champ* et c'est une fonction des variables de l'espace : $e = e(\theta, \xi)$ où $\xi$ repère un point courant situé dans l'entrefer et $\theta$ repère la position du rotor.

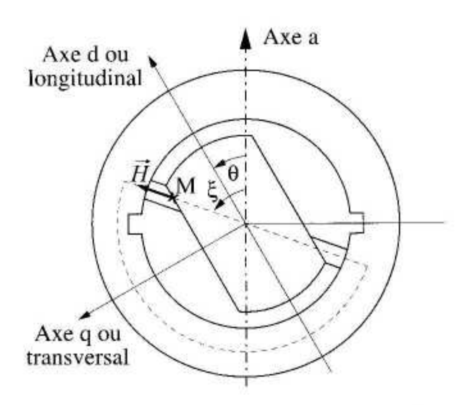



**Figure 3.21.** *Coupe d'une machine à pôles saillants : la longueur du tube d'induction dépend de la position du point M et de la position du rotor*

La perméance superficielle est une fonction de l'angle $(\xi - \theta)$. Elle dépend de la position du point $M$ (angle $\xi$) où l'on cherche à évaluer la force magnétomotrice, et de la position du rotor (angle $\theta$). A cause des deux symétries du rotor (l'axe longitudinal et l'axe transversal sont axes de symétrie), la perméance superficielle $p(\xi - \theta)$ *est paire et périodique, de période* $\pi$. On observe en particulier que, si le rotor fait un demi-tour, la géométrie est redevenue la même. Alors, on peut décomposer la fonction $p(\xi - \theta)$ en série de Fourier. Dans la « théorie limitée au premier harmonique », on ne prend en considération que les deux premiers termes (on vérifiera que le terme d'ordre 2 produit bien un terme appartenant au premier harmonique) :

$$p(\xi - \theta) = p_0 + p_2.\cos\left[2.(\xi - \theta)\right] \qquad [3.45]$$

Dans *le cas des machines à pôles lisses*, le terme $p_2$ est nul et la perméance superficielle se réduit à la constante de formule [3.44].

3.3.2.5. *Détermination de la force magnétomotrice créée par l'enroulement concentré diamétral*

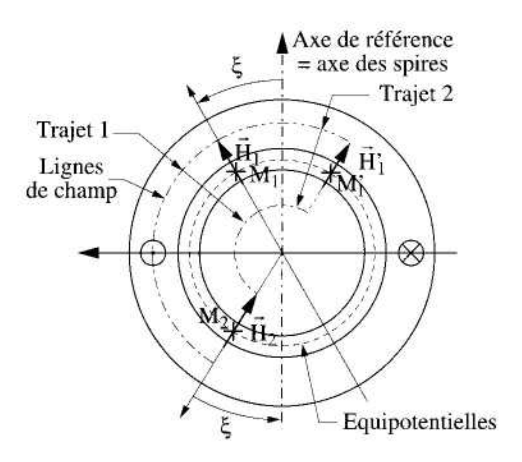



**Figure 3.22.** *Trajets utilisés pour appliquer le théorème d'Ampère*

Pour déterminer la force magnétomotrice dans l'entrefer, on utilise *des propriétés géométriques* et *des lois fondamentales* :

– il y a d'abord *les deux symétries* de la machine :

- par rapport à l'angle $\xi = 0$ (fonction paire) : $F(\xi) = F(-\xi)$ ;
- par rapport à l'angle $\xi = \pi/2$ : $F(\pi - \xi) = -F(\xi)$ ;

– dans l'entrefer : $\vec{B} = \mu_0.\vec{H}$ ;

– le *théorème d'Ampère* est appliqué sur deux types de trajet (figure 3.22) : d'abord sur le trajet 1 qui entoure une encoche contenant $n$ conducteurs parcourus par un courant $i$. Ce trajet est choisi symétrique pour profiter des symétries de la machine ; ensuite, sur le trajet 2 qui n'entoure pas de conducteurs ;

– la *conservativité du flux* dans un tube d'induction élémentaire. On vérifie alors que $B_1 = B_2 \Rightarrow H_1 = H_2$ et sur le trajet 1, on obtient :

$$H_1.e = H_2.e = n_1.i/2 \qquad [3.46]$$

– sur le trajet 2, on vérifie $B_1 = B'_1$ et $H_1 = H'_1$, d'où la propriété : « entre deux courants », *l'amplitude du champ est constante.*

Appliquons la définition de la force magnétomotrice $F$ (voir les équations [3.17] à [3.20]) :

– en $M_1$ :

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}\right)$$

alors :

$$F_1 = H_1.e = \frac{1}{2}.n_1.i$$

– en $M'_1$, comme en M1 :

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}\right)$$

alors :

$$F'_1 = H'_1.e = \frac{1}{2}.n_1.i$$

– en $M_2$ :

$$\left(\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{3.\pi}{2}\right)$$

alors :

$$F_2 = -H_2.e = -H_1.e = -F_1 = -\frac{1}{2}.n_1.i$$

PROPRIÉTÉS.– F est une fonction en créneaux périodiques (figure 3.23). La force magnétomotrice est constante « entre les courants ». Elle varie « au droit des encoches » où elle présente des discontinuités qui valent $\Delta F = n_1.i$, c'est-à-dire le « nombre d'ampères-tours » contenus dans l'encoche.

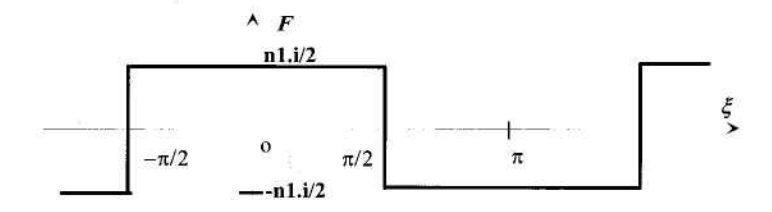



**Figure 3.23.** *Force magnétomotrice F en fonction de l'angle ξ qui repère la position d'un point courant dans l'entrefer*

3.3.2.6. *Développement de la fonction « force magnétomotrice » en série de Fourier (rôle des symétries)*

La force magnétomotrice est une fonction alternative de périodicité $2.\pi$. Elle a une valeur moyenne nulle, et a deux symétries. Dans le référentiel des figures 2.10 et 2.15, la fonction $F(\xi)$ n'a que des termes en cosinus, et ses termes sont tous de rang impair, on notera $h$ le rang de ces harmoniques, et l'on posera :

$$h = 2.k + 1 \qquad [3.47]$$

où $k$ est un entier positif.

Dans ces conditions, le développement en série de Fourier peut s'écrire :

$$F(\xi) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h.\cos(h.\xi) \qquad [3.48]$$

avec $h = 2.k + 1$.

Le calcul de $a_h$ est immédiat :

$$a_h = \frac{2}{\pi}.n_1.i.\frac{1}{h}.(-1)^k \qquad [3.49]$$

3.3.2.7. *Théorie au premier harmonique avec amélioration des distributions de courant et coefficient de bobinage*

La force magnétomotrice créée par l'enroulement diamétral concentré contient beaucoup d'harmoniques. Il est d'usage de « bien construire » les machines en cherchant à favoriser le *fondamental* (que l'on appelle habituellement le « premier harmonique ») et en cherchant à éliminer les harmoniques supérieurs. Le présent

exposé ne peut développer cet aspect des choses qui relève de l'art de la construction des machines et de la « théorie des enroulements ».

Nous nous contenterons de présenter très succinctement les principaux outils utilisés pour cela :

– pour les machines à pôles saillants, la forme des pièces polaires est optimisée ;

– pour les machines à pôles lisses, nous considérons l'exemple de la machine à 18 encoches de la figure 3.24. La figure 3.25a donne l'exemple de l'enroulement purement diamétral (forme en créneau). Les figures 3.25b à 3.25d présentent ses améliorations rendant la distribution « plus sinusoïdale » (diminution des harmoniques supérieurs) : on répartit adéquatement les encoches et les conducteurs dans les encoches, avec deux techniques :

- *la distribution* : les $n$ conducteurs sont « distribués » (répartis) dans $m$ encoches contenant chacune $n_1$ conducteurs (dans l'exemple de la figure 3.25b, $m = 3$), avec : $n = m.n_1$ ;

- *le raccourcissement* : les encoches sont séparées en deux couches. Au moment de la conception, on « fait glisser » une couche par rapport à l'autre couche. Cela explique que certaines encoches peuvent contenir des conducteurs appartenant à deux phases différentes (voir les figures 3.25c et 3.25d). Cette technique est appelée « raccourcissement », car la longueur des conducteurs dans les têtes de bobine est effectivement raccourcie.

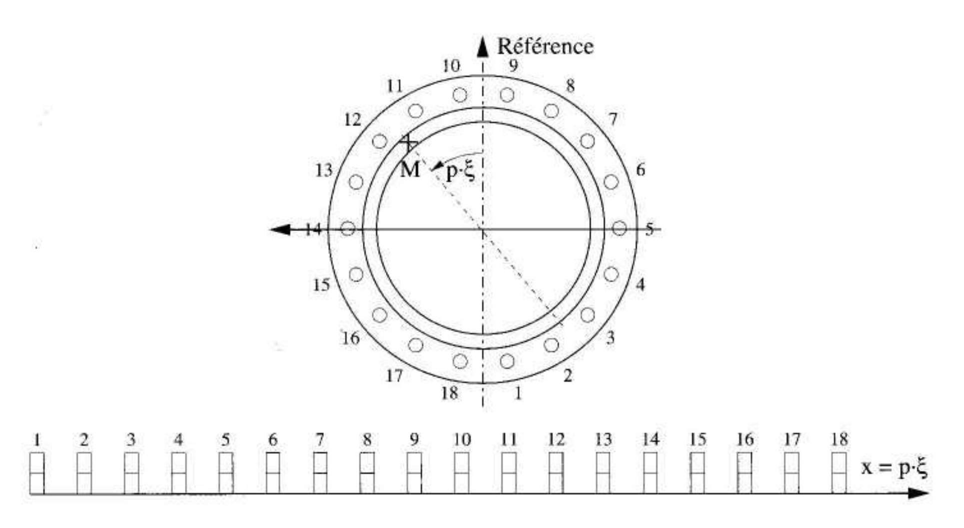



**Figure 3.24.** *Machine à 18 encoches : schéma cylindrique (en haut) et schéma développé (en bas)*

**Figure 3.25.** *Machine à 18 encoches : a) cas diamétral ; b) cas distribué ; c) et d) cas distribué et raccourci (deux variantes)*

Ces techniques permettent d'améliorer, en la rendant « plus sinusoïdale », la forme des forces magnétomotrices. On peut faire une analyse de Fourier qui conduit au résultat suivant :

$$F(\xi) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h.i.\cos(h.\xi) \qquad [3.50]$$

où l'on utilise un coefficient $A_h = a_h / i$ afin de mettre en évidence les effets du courant :

$$A_h = k_b^h.\frac{2}{\pi}.(m.n_1).(-1)^k$$

Le coefficient $k_b{}^h$ est appelé « coefficient de bobinage ». Il est normalement proche de 1 (inférieur à 1) pour le rang $h = 1$, et il est très petit pour les rangs supérieurs à 1.

Pour les « machines bien construites », on admet que tous ces coefficients des rangs supérieurs sont nuls. On peut omettre l'indice $h = 1$, puisque c'est le seul rang que l'on conserve, et la force magnétomotrice se réduit à un seul terme :

$$F(\xi) = A.i.\cos(\xi)\text{, avec : } A = \frac{2}{\pi}.k.n \qquad [3.51]$$

On déduit aussi dans le cadre de cette théorie, l'existence d'un schéma équivalent « au sens du premier harmonique ».

Ce schéma a l'avantage d'être très simple (et rigoureux) : l'enroulement réel (donc distribué et raccourci) est représenté par un enroulement concentré équivalent comme celui de la figure 3.18. *Une phase est représentée par une paire d'encoches diamétrales*, où l'on suppose que le nombre de conducteurs dans une encoche vaut :

$$k.n = k_b^1.(m.n_1) \qquad [3.52]$$

Cet enroulement concentré diamétral équivalent (au sens du premier harmonique) permet de faire deux types d'études :

– d'une part, il permet de calculer les forces magnétomotrices, qui sont données par le modèle de l'équation [3.51] ;

– d'autre part, il permet de déterminer les flux dans les enroulements, comme nous le verrons dans la section 3.4.



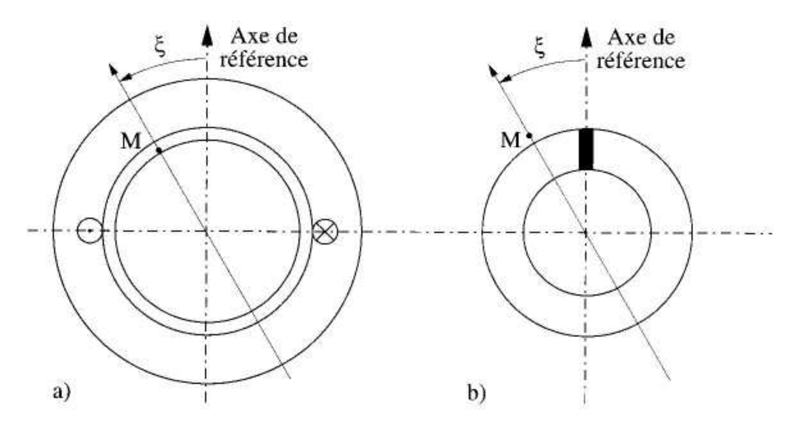




**Figure 3.26.** *Machine équivalente au sens du premier harmonique : a) schéma idéalisé, b) schéma symbolique*

### 3.3.3. *Différents enroulements, représentation idéalisée ou symbolique, angles mécaniques et angles électriques*

#### 3.3.3.1. *Enroulements monophasés et triphasés à une paire de pôles*

Les études précédentes ont été faites dans le cas des enroulements monophasés. Différentes variantes sont possibles.

##### 3.3.3.1.1.Cas d'un enroulement réalisé par des pôles lisses

Les études précédentes portaient sur un tel exemple. Le cas que l'on traitait, comme l'illustre la figure 3.18, concernait le cas où l'axe de la phase était en même temps l'axe de référence. La force magnétomotrice était alors donnée par la formule [3.51].

Pour la suite des études, nous considérerons maintenant un cas plus général, celui d'un enroulement monophasé dont l'axe fait un angle $\xi_\gamma$ avec l'axe de référence, voir figure 3.27.

La force magnétomotrice créée par cet enroulement a pour expression :

$$F_\gamma\left(M\right)=F_\gamma\left(\xi\right)=A_\gamma.i_\gamma.\cos(\xi-\xi_\gamma)\text{, avec : }A_\gamma=\frac{2}{\pi}.k_\gamma.n_\gamma \qquad [3.53]$$

où les différents paramètres et variables sont naturellement indicés $\gamma$.

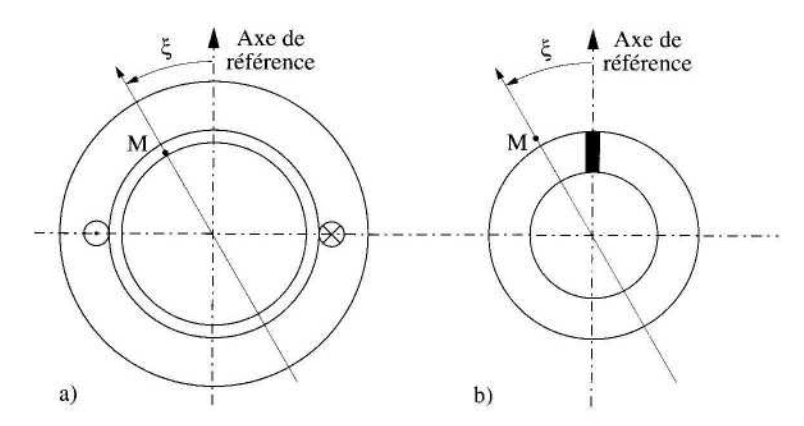



**Figure 3.26.** *Machine équivalente au sens du premier harmonique : a) schéma idéalisé, b) schéma symbolique*

### 3.3.3. *Différents enroulements, représentation idéalisée ou symbolique, angles mécaniques et angles électriques*

#### 3.3.3.1. *Enroulements monophasés et triphasés à une paire de pôles*

Les études précédentes ont été faites dans le cas des enroulements monophasés. Différentes variantes sont possibles.

##### 3.3.3.1.1.Cas d'un enroulement réalisé par des pôles lisses

Les études précédentes portaient sur un tel exemple. Le cas que l'on traitait, comme l'illustre la figure 3.18, concernait le cas où l'axe de la phase était en même temps l'axe de référence. La force magnétomotrice était alors donnée par la formule [3.51].

Pour la suite des études, nous considèrerons maintenant un cas plus général, celui d'un enroulement monophasé dont l'axe fait un angle $\xi_\gamma$ avec l'axe de référence, voir figure 3.27.

La force magnétomotrice créée par cet enroulement a pour expression :

$$F_\gamma\left(M\right) = F_\gamma\left(\xi\right) = A_\gamma.i_\gamma.\cos(\xi - \xi_\gamma)\text{, avec : } A_\gamma = \frac{2}{\pi}.k_\gamma.n_\gamma \qquad [3.53]$$

où les différents paramètres et variables sont naturellement indicés $\gamma$.

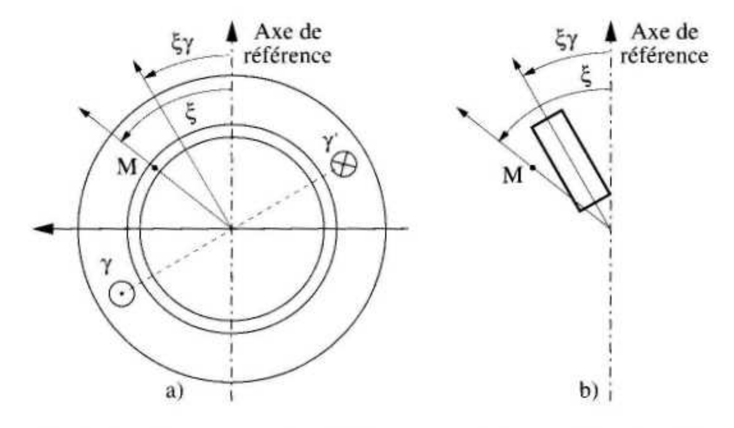



**Figure 3.27.** *Enroulement monophasé faisant un angle $\xi_\gamma$ avec l'axe de référence : a) schéma idéalisé, b) schéma symbolique*

3.3.3.1.2. Cas d'un enroulement monophasé à pôles saillants : exemple d'un rotor

Si un enroulement monophasé est solidaire d'un rotor, comme c'est le cas pour l'enroulement d'excitation d'une machine synchrone, voir figure 3.11, la force magnétomotrice créée a pour expression :

$$F_f(M) = F_f(\xi) = A_f.i_f.\cos(\xi - \theta), \text{ avec : } A_f = k_f.\frac{n_f}{2} \qquad [3.54]$$

où $k_f$ est un coefficient constructif qui dépend de la géométrie des pièces polaires et $n_f$ représente le nombre de spires en série dans l'enroulement.

REMARQUE.– Ces deux premiers exemples montrent que *les expressions des forces magnétomotrices ont les mêmes formes, que l'enroulement soit placé au rotor ou au stator*, car elles sont relatives au champ principal qui traverse l'entrefer, et l'on confond les valeurs numériques des diamètres $D_1$ et $D_2$ approchées toutes deux par $D$.

3.3.3.1.3. Schéma équivalent symbolique d'un enroulement monophasé

Pour représenter les enroulements, il est fréquent que l'on ne les représente pas par des enroulements concentrés diamétraux, comme ceux que nous avons utilisés jusqu'à présent, mais par de simples solénoïdes, comme cela est indiqué sur la figure 3.26.b. Ces schémas ne permettent pas de faire des analyses physiques. Les analyses physiques sont synthétisées par les formules que nous venons de donner (de l'équation [3.50] à [3.54]). Mais ils simplifient la représentation des systèmes polyphasés comme ceux que nous considérerons à propos des machines synchrones et asynchrones.

3.3.3.1.4. Enroulement triphasé à une paire de pôles

La figure 3.28 donne l'exemple d'une machine triphasée au stator, *symétrique*, à une paire de pôles. *En pratique, il s'agit du stator d'une machine synchrone ou d'une machine asynchrone*. Les trois enroulements sont identiques, et nous noterons $k_s$ les coefficients de bobinages, et $n_s$ le nombre de conducteurs par pôles : ces deux paramètres sont identiques pour les trois phases. Les phases se distinguent par les directions de leurs axes. L'hypothèse de symétrie nous indique que les angles entre ces axes sont obligatoirement de valeur : $\pm 2.\pi/3$. Dans ces conditions, la formule [3.53] nous permet d'écrire les forces magnétomotrices créées au point $M$, repéré par l'angle $\xi$, par chacune des trois phases :

$$\begin{aligned} F_a(M) &= F_a(\xi) = A_s.i_a.\cos(\xi) \\ F_b(M) &= F_b(\xi) = A_s.i_b.\cos(\xi - 2\pi/3) \\ F_c(M) &= F_c(\xi) = A_s.i_c.\cos(\xi + 2\pi/3) \end{aligned} \quad [3.55]$$

avec :

$$A_s = \frac{2}{\pi}.k_s.n_s$$

La force magnétomotrice résultante, notée $F_t$, créée par l'ensemble des trois phases, est égale à la somme des forces magnétomotrices créées par chaque phase :

$$F_t(\xi) = F_a(\xi) + F_b(\xi) + F_c(\xi) \quad [3.56]$$

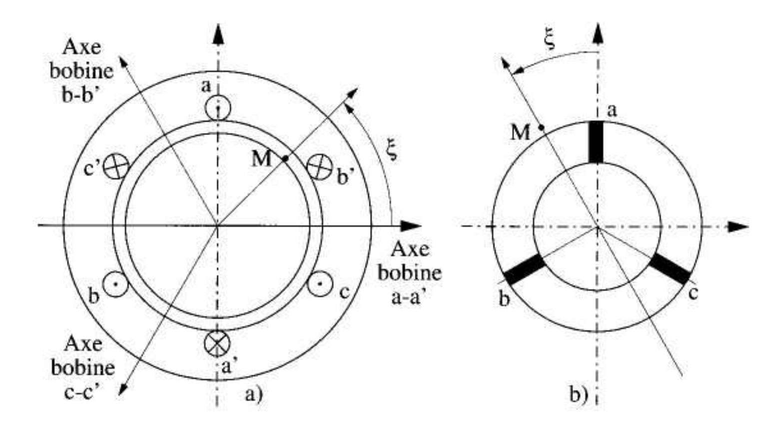



**Figure 3.28.** *Machine triphasée au stator : a) schéma idéalisé, b) schéma symbolique*

3.3.3.2. *Enroulements multipolaires : cas des enroulements monophasés*

3.3.3.2.1. Périodicité spatiale et nombre de paires de pôles

On cherche fréquemment à modifier la périodicité de la distribution de champ. La périodicité vaudra alors $2.\pi/p$ où $p$ est « le nombre de paires de pôles ». Le nombre $p$ est entier. Si p est supérieur à 1, l'enroulement est dit « multipolaire ». Une machine tournante a deux armatures, le stator et le rotor ; *ces deux armatures ont toujours le même nombre de paires de pôles p*. Si les nombres de paires de pôles étaient différents, la machine produirait un couple moyen nul.

En pratique, dans les équations, on substitue l'angle $p.\xi$ à $\xi$ dans les formules que nous venons de présenter :

– l'angle $\xi$ est alors nommé « angle mécanique » ;

– et l'angle $p.\xi$ est nommé « angle électrique ». La variable spatiale apparaît toujours sous cette forme dans les équations.

Nous allons montrer comment réaliser cette périodicité $2.\pi/p$.

3.3.3.2.2. Exemple d'enroulement monophasé à deux paires de pôles

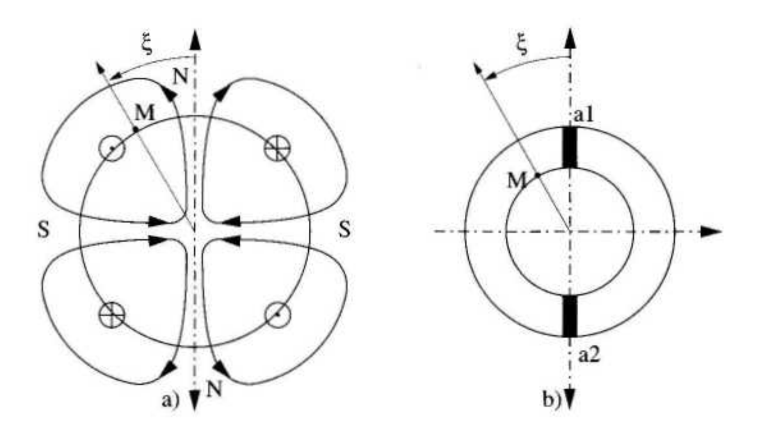



**Figure 3.29.** *Enroulement monophasé à p = 2 paires de pôles (avec l'angle mécanique) : a) schéma idéalisé ; b) schéma symbolique*

Les enroulements d'une même phase doivent être parcourus par le même courant. C'est pour cela que les enroulements sont souvent mis en série. On peut aussi les mettre en parallèle si l'on est sûr que les impédances sont bien les mêmes (mêmes enroulements, mêmes têtes de bobines). Dans le cas le plus général de $p$ paires de pôles, on peut démontrer que la force magnétomotrice créée par l'enroulement a pour expression :

$$F_\gamma(M) = F_\gamma(\xi,\xi_\gamma) = A_\gamma.i_\gamma.\cos\left[p.(\xi-\xi_\gamma)\right] \quad [3.57]$$

avec :

$$A_\gamma = \frac{2}{\pi}.k_\gamma.n_\gamma$$

On pose aussi :

$$n_\gamma = \frac{N_\gamma}{2.p} \qquad [3.58]$$

où $N_\gamma$ est *le nombre de conducteurs en série dans la phase*. La formule [3.57] montre, comme déjà annoncé ci-dessus, que c'est toujours l'angle électrique $p.\xi$ qui intervient dans les équations. On peut donc représenter les enroulements multipolaires par un schéma symbolique où l'on ne représente qu'une paire de pôles, mais les angles indiqués sont les angles électriques (voir figure 3.30).

Les figures 3.10 et 3.11 donnaient l'exemple de machines à rotor excité. Si les machines ont $p$ paires de pôles, la force magnétomotrice qu'elle créent ont l'expression :

$$F_f(\xi,\theta) = A_f.i_f.\cos\left[p.(\xi-\theta)\right], \text{ avec } A_f = \frac{2}{\pi}.k_f.n_f \qquad [3.59]$$

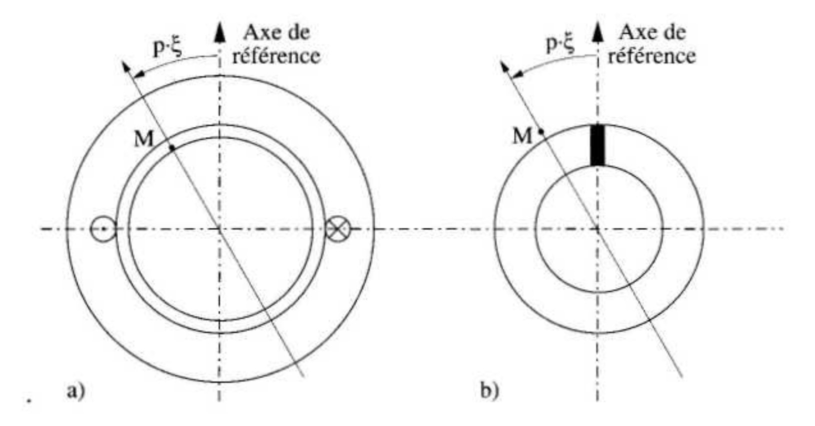



**Figure 3.30.** *Enroulement monophasé multipolaire : a) schéma idéalisé avec l'angle électrique ; b) schéma symbolique avec l'angle électrique*

[redacted]

3.3.3.3. *Cas des enroulements triphasés multipolaires*

On peut réaliser des enroulements triphasés multipolaires en décalant les enroulements d'un angle mécanique égal à $2.\pi/3.p$. La figure 3.31 donne l'exemple d'une armature triphasée à deux paires de pôles, dans deux représentations : d'abord (cas a) avec des enroulement diamétraux concentrés équivalents (par exemple, la paire de pôles a-a' est en série avec la paire de pôles a'' et a''', pour former la seule phase *a*), puis avec des enroulements symboliques (solénoïdes) avec l'angle mécanique (cas b, où, par exemple les enroulement $a_1$ et $a_2$ sont en série pour former la phase *a*), et enfin avec l'angle électrique (cas c).

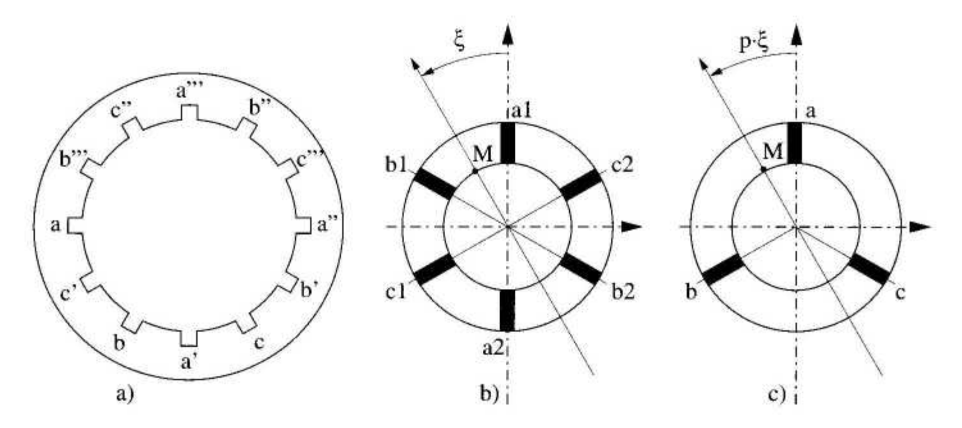



**Figure 3.31.** *Enroulement triphasé multipolaire : a) schéma idéalisé avec $p = 2$ paires de pôles ; b) schéma symbolique avec l'angle mécanique $\zeta$ ; c) schéma symbolique avec l'angle électrique $p.\xi$*

Les forces magnétomotrices créées par les trois phases ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
F_a(M) &= F_a(\xi) = A_s.i_a.\cos(p.\xi) \\
F_b(M) &= F_b(\xi) = A_s.i_b.\cos\left[p.(\xi - \frac{2.\pi}{3.p})\right] = A_s.i_b.\cos\left(p.\xi - \frac{2.\pi}{3}\right) \\
F_c(M) &= F_c(\xi) = A_s.i_c.\cos\left[p.(\xi + \frac{2.\pi}{3.p})\right] = A_s.i_c.\cos(p.\xi + \frac{2.\pi}{3})
\end{aligned} \quad [3.60]$$

avec :

$$A_s = \frac{2}{\pi}.k_s.n_s$$

La force magnétomotrice résultante, notée $F_t$, créée par l'ensemble des trois phases, est égale à la somme des forces magnétomotrices créées par chaque phase, comme dans l'équation [3.56] :

THÉORÈME DE FERRARIS.– Si l'on suppose que la machine est alimentée par des courants sinusoïdaux triphasés, équilibrés, directs, définis par :

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = I.\sqrt{2}.\begin{pmatrix} \cos(\omega.t-\varphi) \\ \cos\left(\omega.t-\varphi-\frac{2.\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega.t-\varphi+\frac{2.\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad [3.61]$$

alors, la force magnétomotrice résultante vérifie l'expression suivante :

$$F_t = \frac{3}{2}.A_s.I.\sqrt{2}.\cos\left[p.\xi-(\omega.t-\varphi)\right] \quad [3.62]$$

On définit alors une onde progressive appelée « champ tournant », à distribution sinusoïdale, d'amplitude :

$$F_{tm} = \frac{3}{2}.A_s.I.\sqrt{2}$$

dont la vitesse de rotation est égale à la « vitesse de synchronisme » $\Omega_s$, imposée par la pulsation de l'alimentation :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{p} = \Omega_s$$

C'est ce champ tournant qui permet une *conversion d'énergie directe* dans les machines à courant alternatif. L'adjectif « direct » signifie qu'en régime permanent, le couple produit est constant, sans ondulation, ce qui est une qualité très importante recherchée. La vitesse de synchronisme est la vitesse de rotation du rotor d'une machine synchrone en régime permanent. On voit ainsi que le nombre de paires de pôles jouent un rôle important dans le dimensionnement d'une machine. A partir des formules [3.57] à [3.62], on voit que l'on peut représenter la machine triphasée multipolaire par un enroulement triphasé équivalent où l'on utilise l'angle électrique (voir figure 3.31).

3.3.3.4. *Cas des enroulements à cage*

On rencontre également des enroulements qui ne sont pas bobinés. Il s'agit des « cages d'écureuil ». Ces enroulements sont constitués de barres enfilées dans les paquets de tôles des rotors. Ils sont très économiques à fabriquer ; aussi ils constituent les enroulements de l'immense majorité des machines asynchrones, mais également les « amortisseurs » de certaines machines synchrones. Ces enroulements sont polyphasés, et l'on peut faire une théorie où le nombre de phases est égal au nombre de barres. Nous ne développerons pas cette théorie ici. Nous admettrons simplement qu'il existe des enroulements bobinés équivalents.

3.3.3.4.1. Cas des amortisseurs des machines synchrones

Dans le cas des amortisseurs des machines synchrones (voir figure 3.32), *on admet que l'on peut utiliser habituellement un enroulement diphasé équivalent.* La figure 3.33 donne un schéma équivalent où l'amortisseur est représenté par deux phases, habituellement indicées $D$ et $Q$ : l'axe de l'enroulement $D$ (« direct ») est confondu avec l'axe *longitudinal* du rotor, et l'axe de l'enroulement $Q$ (« en quadrature ») est confondu avec l'axe *transversal* du rotor. Ces axes ont l'avantage de respecter les symétries naturelles du rotor, ce qui simplifie grandement l'écriture mathématique des équations. Les forces magnétomotrices de l'enroulement diphasé ont les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
F_D(\xi,\theta) &= A_D.i_D.\cos\left(p.(\xi-\theta)\right) \\
F_Q(\xi,\theta) &= A_Q.i_Q.\sin\left(p.(\xi-\theta)\right)
\end{aligned}
\qquad [3.63]
$$

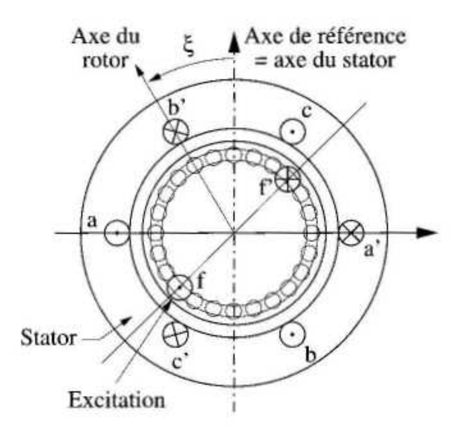



**Figure 3.32.** *Représentation d'un amortisseur à cage dans le cas d'une machine synchrone à pôles lisses*

Dans le cas des machines à pôles lisses, la géométrie du rotor à une symétrie cylindrique, et les coefficients $A_D$ et $A_Q$ sont égaux : $A_D = A_Q$. Dans le cas des machines à pôles saillants, les trajets des lignes de champ sont différents sur chaque axe et $A_D \neq A_Q$.

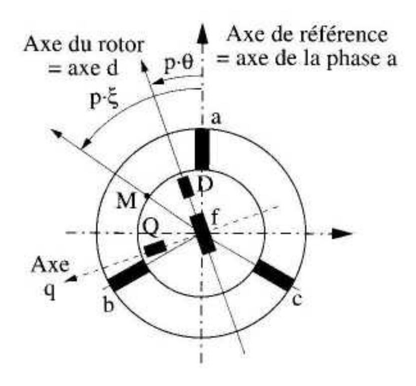



**Figure 3.33.** *D et Q : enroulement diphasé équivalent à un amortisseur à cage*

3.3.3.4.2. Cas des rotors à cage des machines asynchrones

Dans le cas des rotors à cage des machines asynchrones (voir la figure 3.34), *on admet qu'il existe un enroulement triphasé équivalent*, que l'on peut indicé : *ra*, *rb*, *rc*, ou *A*, *B*, *C* (voir la figure 3.35).

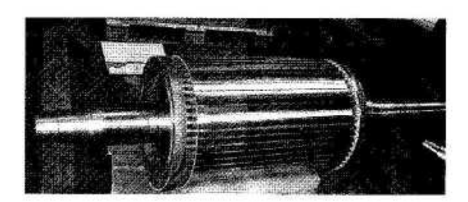


**Figure 3.34.** *Rotor à cage d'une machine asynchrone (on distingue les encoches et les anneaux de cuivre qui court-circuitent les barres). (Photo A.R. ©ALSTOM-1999)*

Les forces magnétomotrices créées par les trois phases du rotor ont pour expressions :

$$
\begin{aligned}
F_A(\xi,\theta) &= A_r.i_A.\cos\left(p.(\xi-\theta)\right) \\
F_B(\xi,\theta) &= A_r.i_B.\cos\left(p.(\xi-\theta)-2.\pi/3\right) \\
F_C(\xi,\theta) &= A_r.i_C.\cos\left(p.(\xi-\theta)+2.\pi/3\right)
\end{aligned}
\qquad [3.64]
$$

Les enroulements des cages sont toujours en court-circuit. Ils ne sont pas alimentés par des sources, de tensions ou de courants, extérieures. Ils sont alimentés par l'effet de l'induction créée par les enroulements de l'autre armature (le plus souvent le stator). Pour ces enroulements, le nombre de paires de pôles ne se pose pas : par effet de l'induction venue du stator, ils prennent automatiquement le nombre de paires de pôles de l'autre armature.

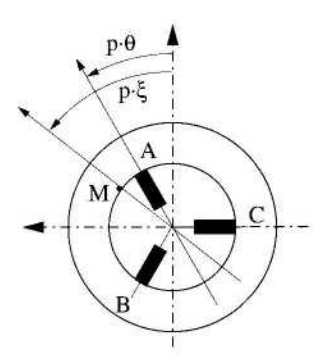



**Figure 3.35.** *Enroulement triphasé équivalent à un rotor à cage (schéma symbolique)*

### 3.4. Calcul des inductances des machines à courant alternatif

#### 3.4.1. *But et méthodologie*

En simplifiant la problématique, nous pouvons dire que la description des machines à courant alternatif est en fait la description des *champs* créés par des *enroulements électriques* placés dans des *circuits magnétiques* ayant une symétrie particulière, *cylindrique*. Les enroulements sont solidaires de deux armatures : le stator, qui est fixe, et le rotor qui est mobile, et dont la position est repérée par l'angle $\theta$. Nous souhaitons décrire ces dispositifs par des équations de la forme :

$$\psi_{\delta} = \sum_{\gamma} L_{\delta\gamma}(\theta).i_{\gamma} \qquad [3.65]$$

Ces équations supposent admis un certain type de descriptions et d'hypothèses. Enumérons-les :

– les enroulements indicés $\gamma$, que nous considérons ici comme des « inducteurs », créent un champ magnétique que nous décrivons par les forces magnétomotrices et l'induction $\vec{B}$ ;

– les enroulements indicés $\delta$, que nous considérons ici comme des « induits », subissent un champ magnétique et l'induction $\vec{B}$ . Celle-ci crée un flux de l'induction, noté $\psi_\delta$ ;

– nous faisons *l'hypothèse de linéarité*, et nous admettons donc qu'il existe un coefficient constant noté $L_{\delta\gamma}$ , l'inductance. Celle-ci est dite « mutuelle » si les indices $\delta$ et $\gamma$ sont différents ; elle est dite « propre » si les indices ont la même valeur : $\delta = \gamma$ ;

– nous faisons aussi *l'hypothèse de* « symétrie » : tous les enroulements sont identiques et simplement décalés dans l'espace, et *l'hypothèse du « premier harmonique »* qui permet de calculer l'expression de la force magnétomotrice, ou différence de potentiel magnétique scalaire, entre le stator et le rotor. Le résultat essentiel est donc donné par les formules [3.57] et [3.58] qui donnent l'expression du premier harmonique de la force magnétomotrice créée par un enroulement. La formule [3.57] fait intervenir deux angles : l'angle $\xi$ qui repère « le point courant » dans l'entrefer, et l'agle $\xi_\gamma$ qui repère l'axe de l'enroulement inducteur ;

– nous devons aussi connaître la *fonction* « perméance superficielle », notée $p(\xi,\theta)$, dont la forme générale dans le cadre de la théorie du premier harmonique est [3.45], qui dépend de la géométrie de la machine, et qui permet d'écrire l'induction (plus exactement, la composante normale de l'induction) au point $M$ de l'entrefer en fonction de la force magnétomotrice :

$$B\left(\xi,\xi_\gamma,\theta\right) = p(\xi,\theta).F\left(\xi,\xi_\gamma\right) \qquad [3.66]$$

*– nous distinguons le « flux principal » et le « flux de fuite ».* Cette approche permet de distinguer deux termes très différents (tant par leur signification physique que par leurs expressions mathématiques) dans $L_{\delta\gamma}$ :

$$L_{\delta\gamma} = L_{p\delta\gamma} + l_{\delta\gamma} \qquad [3.67]$$

où $L_{p\delta\gamma}$ est le terme associé au champ principal qui traverse l'entrefer et que nous modélisons dans le cadre de la théorie du premier harmonique, et $l_{\delta\gamma}$ est le terme associé aux flux de fuite. Le terme correspondant aux fuites n'est pas calculable par une méthode simple : elle dépend trop de la géométrie interne de la machine (formes et dimensions des encoches, surtout). Nous admettrons que le terme de fuite vérifie la propriété :

$$l_{\delta\gamma} = \text{constante} \qquad [3.68]$$

[redacted]

En effet, ce terme est supposé toujours constant, et insensible à la saturation car on admet que les lignes de fuite traversent surtout de grandes zones d'air (voir paragraphe 3.3.1.3.3, figure 3.17). *Ce terme est nul quand il concerne l'inductance mutuelle située de part et d'autre de l'entrefer.* Par contre, contrairement à ce qu'on lit souvent dans la littérature, *il n'y a pas de raison de supposer qu'il est nul quand il concerne l'inductance mutuelle entre deux enroulements situés sur la même armature*, car dans le cas fréquent des enroulements « raccourcis » (voir figures 3.25c et 3.25d), des conducteurs de deux phases différentes peuvent être situés dans les mêmes encoches : des lignes de champ de fuite sont alors communes à deux phases différentes et il y a bien existence d'une mutuelle de fuite. Bien entendu, c'est dans le cas de l'inductance propre que les inductances de fuite ont leurs valeurs les plus élevées :

– la conversion d'énergie est associée au terme $L_{p\delta\gamma}$ de l'inductance et il est fondamental d'en connaître les propriétés de façon précise. C'est pourquoi, on cherche à calculer explicitement ce terme ;

– il faut tenir compte du nombre de spires et du bobinage de l'enroulement induit : le flux créé dans une paire de pôles est égal à ce flux dans une spire, noté $\phi_{\delta,1\text{ spire}}$, multiplié par le nombre de spires de la paire de pôles, soit :

$$k_1{}^{\delta}.m.n_1 = k_1{}^{\delta}.n = k_1{}^{\delta}.N_{\delta}/2.p$$

où $N_{\delta}$ est le nombre de conducteurs en série dans la phase induite δ., $k_1{}^{\delta}$ est le coefficient de bobinage relatif au premier harmonique de la phase induite, ainsi $k_1^{\delta}.N_{\delta}/2$ est le nombre de spires équivalentes de l'enroulement concentré équivalent à l'enroulement réel. En outre, tous les conducteurs des $p$ paires de pôles de la phases sont en série et le flux total dans la phase est donc obtenu en multipliant le flux dans une paire de pôles par le nombre de paires de pôles, c'est-à-dire $p$. Le flux total de l'induction (champ principal) est donné par :

$$\psi_{p\delta\gamma} = p.\frac{k_1^{\delta}.N_{\delta}}{2.p}.\phi_{\delta,1\text{ spire}} = \frac{k_1^{\delta}.N_{\delta}}{2}.\phi_{\delta,1\text{ spire}} \qquad [3.69]$$

– le terme $\phi_{\delta,1\text{ spire}}$ est le flux induit dans une spire de l'enroulement inducteur $\delta$. La figure en perspective 3.36 donne le principe du calcul du flux dans une spire dont les conducteurs actifs sont repérés par les angles $\xi_1$ et $\xi_2$. Le flux est alors donné par : $\phi_{\delta,1\text{ spire}} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} B_{\gamma}.dS$ . Dans le cas d'une spire appartenant à une paire de pôles, les bornes sont : $\xi_1 = \xi_{\delta} - \pi/2.p$ et $\xi_1 = \xi_{\delta} + \pi/2.p$, et son expression est donnée par (voir figure 3.37) :

$$\phi_{\delta,1\ \text{spire}} = \int_{\xi_\delta-\pi/2.p}^{\xi_\delta+\pi/2.p} B_\gamma.dS \qquad [3.70]$$

où l'angle (mécanique) $\xi_\delta$ repère la direction de l'axe de l'enroulement $\delta$.

– cette approche permet de déterminer l'inductance $L_{p\delta\gamma}$ relative au champ principal :

$$L_{p\delta\gamma} = \frac{\Psi_{p\delta\gamma}}{i_\gamma} \qquad [3.71]$$

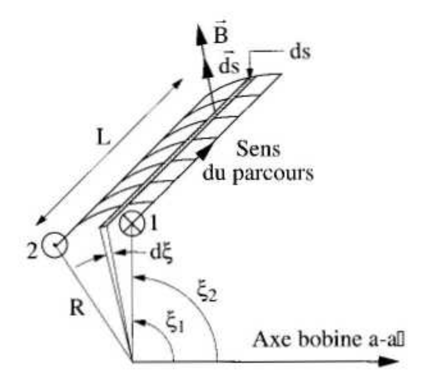



**Figure 3.36.** *Détermination du flux dans un élément de surface*

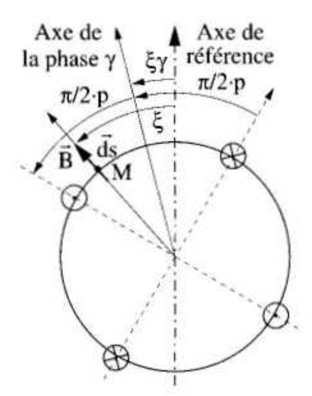



**Figure 3.37.** *Détermination du flux dans un enroulement induit*

### 3.4.2. *Calcul explicite des inductances*

Nous avons présenté au paragraphe précédent la méthode de calcul du terme principal de l'inductance. Nous allons maintenant expliciter les formules.

#### 3.4.2.1. *Définitions des angles qui repèrent l'inducteur et l'induit*

Nous considérons deux enroulements quelconques de la machine. La figure 3.38, représentée en angle électrique, les situe tous deux au rotor, mais ils pourraient être l'un, ou l'autre, ou les deux, au stator : *le développement serait exactement le même car nous ne considérons ici que les effets du champ principal qui traverse l'entrefer.* On indice $\gamma$ l'enroulement considéré comme l'inducteur (le modèle de la force magnétomotrice créé en un point $M$ de l'entrefer est donné pas la formule [3.57]). On indice $\delta$ l'enroulement considéré comme l'induit (l'effet de l'induction est décrit par les formules [3.69] et [3.70]). La figure 3.38 rappelle les définitions des différents angles avec la convention des angles électriques. Par simplicité, nous avons représenté une machine à pôles lisses, mais dans la suite nous traiterons le cas plus général de la machine à pôles saillants, telle qu'elle a été décrite, par exemple, par les figures 3.11 ou 3.21.

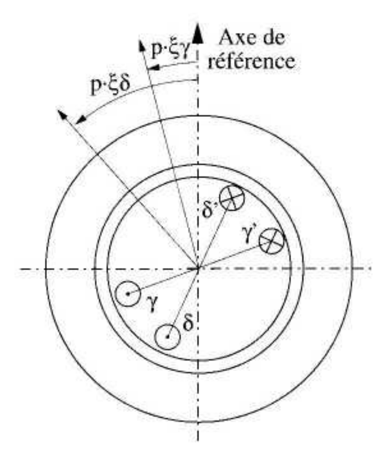



**Figure 3.38.** *Définition des angles de l'induit et de l'inducteur*

#### 3.4.2.2. *Détermination de l'expression de l'induction*

L'expression de l'induction en un point $M$ de l'entrefer est donnée par la formule [3.66] qui utilise la notion de perméance superficielle dont le modèle le plus général répond à la formule [3.45]. La trigonométrie élémentaire nous donne l'expression de

l'induction $B$. *Nous devons limiter l'expression au premier harmonique d'espace* (angle $\xi$) pour respecter nos hypothèses (tout harmonique supérieur au rang 1 doit être multiplié par un coefficient de bobinage relatif à cet harmonique, et par hypothèse, ce coefficient est supposé nul). L'expression de $B$ est :

$$B_\gamma\left(\xi,\theta,\xi_\gamma,\xi_\delta\right)=A_\gamma.p_0.\cos\left[p.\left(\xi-\xi_\gamma\right)\right].i_\gamma$$
$$+A_\gamma.\frac{p_2}{2}.\cos\left[p.\left(\xi-2.\theta+\xi_\gamma\right)\right].i_\gamma \qquad [3.72]$$

On voit que $B\gamma$ a deux composantes :

– $B_{\gamma1}=A_\gamma.p_0.\cos\left[p.\left(\xi-\xi_\gamma\right)\right].i_\gamma$ dont l'axe est identique à celui de la force magnétomotrice (f.m.m.). créée par l'inducteur $\gamma$. Sa direction est donc donnée par l'angle $p.\xi_\gamma$ ;

– $B_{\gamma2}=A_\gamma.\frac{p_2}{2}.\cos\left[p.\left(\xi-2.\theta+\xi_\gamma\right)\right].i_\gamma$ dont l'axe est symétrique au précédent par rapport à l'axe du rotor. Sa direction est donc donnée par l'angle $p.\xi=2.p.\theta-p.\xi_\gamma$.

3.4.2.3. *Calcul du flux*

On veut calculer le flux créé par l'enroulement inducteur $\gamma$ dans l'enroulement induit $\delta$. Il est problématique d'utiliser le schéma équivalent écrit en angle électrique, car le flux total dans l'enroulement $\delta$ concerne toutes les paires de pôles.

Nous considérons donc la figure 3.37 qui décrit l'enroulement $\delta$ dans une représentation plus près de la réalité physique, c'est-à-dire en angle mécanique. Dans cette géométrie, on peut d'abord écrire le flux dans une unique spire d'une unique paire de pôles. Ce flux est donné par la formule [3.70] où l'élément d'aire $dS$ a pour expression :

$$dS=L.R.d\xi=L.\frac{D}{2}.d\xi$$

Un calcul d'intégrale élémentaire donne l'expression suivante pour le flux dans une spire :

$$\phi_{\delta,1\text{ spire}}=A_\gamma.i_\gamma.\frac{L.D}{p}.\left[p_0.\cos\left(p.\left(\xi_\delta-\xi_\gamma\right)\right)+\frac{p_2}{2}.\cos\left(p.\left(\xi_\delta-2.\theta+\xi_\gamma\right)\right)\right] \qquad [3.73]$$

Alors, l'application de la formule [3.69] donne l'expression du flux dans toute la phase induite :

$$\psi_{p\delta\gamma} = \frac{L.D}{\pi}.\left(\frac{k_1^{\delta}.N_{\delta}}{2.p}\right).\left(\frac{k_1^{\gamma}.N_{\gamma}}{2.p}\right).\left\{\begin{array}{l} 2.p_0.\cos\left[p.\left(\xi-\xi_{\gamma}\right)\right] \\ +p_2.\cos\left[p.\left(\xi-2.\theta+\xi_{\gamma}\right)\right] \end{array}\right\}.i_{\gamma} \qquad [3.74]$$

3.4.2.4. *Détermination de l'expression de l'inductance mutuelle entre les enroulements* δ *et* γ

Donc, l'inductance définie par les équations [3.65] et [3.71] a pour expression générale dans le cadre de la théorie du premier harmonique :

$$L_{p\delta\gamma} = L_{p0,\delta\gamma}.\cos\left[p.\left(\xi_{\delta}-\xi_{\gamma}\right)\right]+L_{p2,\delta\gamma}.\cos\left[p.\left(\xi_{\delta}-2.\theta+\xi_{\gamma}\right)\right]+l_{\delta\gamma} \qquad [3.75]$$

où l'on a introduit le terme constant $l_{\delta\gamma}$ associé au flux de fuite. Les deux autres termes sont de type « cosinusoïdal ».

Nous distinguons :

– le terme qui existe toujours, en particulier dans le cas des machines à pôles lisses ; *ce terme est proportionnel au cosinus de l'angle entre les deux phases* $\gamma$ et $\delta$, et son amplitude est :

$$L_{p0,\delta\gamma} = \frac{2.L.D}{\pi}.\frac{k_1^{\delta}.N_{\delta}}{2.p}.\frac{k_1^{\gamma}.N_{\gamma}}{2.p}.p_0 \qquad [3.76]$$

– et le terme qui n'existe que dans le cas des machines à pôles saillants (présence du terme $p_2$) ; ce terme est proportionnel au cosinus de l'angle suivant :

$$p.\left(\xi_{\delta}-\theta\right)+p.\left(\xi_{\gamma}-\theta\right)=p.\left(\xi_{\delta}-2.\theta+\xi_{\gamma}\right)$$

Son amplitude est :

$$L_{p2,\delta\gamma} = \frac{2.L.D}{\pi}.\frac{k_1^{\delta}.N_{\delta}}{2.p}.\frac{k_1^{\gamma}.N_{\gamma}}{2.p}.\frac{p_2}{2} \qquad [3.77]$$

Ce terme disparaît dans les machines à pôles lisses où l'on pose $p_2 = 0$.

## 3.5. Description et modélisation des principales machines à courant alternatif

### 3.5.1. *Description et modélisation des machines synchrones*

#### 3.5.1.1. *Introduction*

La machine synchrone est une machine triphasée destinée à être alimentée au stator par des courants alternatifs sinusoïdaux de pulsation $\omega$, et en régime permanent, et elle tourne à la vitesse dite « vitesse de synchronisme » :

$$\Omega_s = \omega / p \qquad [3.78]$$

Le rotor est monophasé et il contient un enroulement d'excitation alimenté par un courant continu. Ce dernier peut être remplacé par un aimant. La machine synchrone est particulièrement robuste. Son stator (ou « induit ») peut être facilement refroidi. Quand l'excitation est bobinée, on dispose d'un élément de réglage très utile. La machine synchrone a des applications très diversifiées. En particulier, nous signalerons :

– *son utilisation en génératrice*, ou « alternateur ». Elle est habituellement entraînée à vitesse constante et fournit une puissance sous forme de tensions et courants alternatifs. La fréquence de ces signaux est proportionnelle à la vitesse. Dans cette application, elle est le plus souvent munie d '« amortisseurs » au rotor dont le but est, justement, « d'amortir » les transitoires en cas d'accidents comme les courts-circuits à la sortie des phases (accidents sur les lignes) ;

– *son utilisation en moteur*. Si l'on souhaite une vitesse constante, elle peut être alimentée par un réseau à fréquence fixe si on l'amène à une vitesse proche de la vitesse de synchronisme. Nous considèrerons plutôt ici le cas de la vitesse variable : elle est alors alimentée par un onduleur à fréquence réglable, et elle est « autopilotée » pour que la fréquence des courants alternatifs qui l'alimentent soit proportionnelle à sa vitesse. Dans ce cas, elle n'est pas munie d'amortisseurs et l'excitation est créée, soit par un enroulement bobiné, soit par des aimants (petites et moyennes puissances).

C'est pourquoi la machine synchrone est sans doute la machine électrique qui présente les possibilités de variantes les plus diverses qui peuvent aboutir à une machine complexe. En effet, la machine synchrone comprend, de façon fondamentale :

– un *stator polyphasé*, habituellement triphasé (voir figure 3.28) alimenté par des courants triphasés. Il existe cependant des machines à stator diphasé (en petite puissance) ou hexaphasée (ou deux fois triphasée, en grande puissance) ;

– un rotor qui contient au moins un enroulement *d'excitation monophasé*. Celui-ci peut être réalisé par un bobinage alimenté en courant continu (voir figures 3.10, 3.11 et 3.39), ou par des aimants permanents (voir figures 3.12 et 3.40).

Le rotor peut avoir deux types de géométrie :

– rotor à *pôles lisses*, présentant une isotropie magnétique (voir figures 3.39 et 3.41),

– rotor à *pôles saillants*, présentant une anisotropie magnétique (voir figure 3.42).

PROPRIÉTÉ.– Les symétries du rotor imposent les symétries de la machine :

– le premier axe de symétrie est l'axe de l'enroulement d'excitation du rotor. On l'appelle « axe direct »[5] (ou « axe d ») ou « axe longitudinal »[6] ;

– le deuxième axe de symétrie est orthogonal (en « angle électrique ») au précédent. On l'appel « axe en quadrature » (ou « axe q ») ou « axe transversal ».

La prise en compte de ces symétries est fondamentale dans la modélisation des machines synchrones.

Enfin, le rotor peut comporter un *amortisseur*, qui est du type « cage d'écureuil ».

On distingue plusieurs variantes de machines synchrones réellement existantes. Par ordre de complexité croissante, nous proposons la classification suivante :

1. machine synchrone à pôles lisses, sans amortisseurs, avec excitation bobinée ;

2. machine synchrone à pôles lisses, sans amortisseurs, à aimants permanents. Ces aimants sont habituellement déposés en surface. Dans nos modèles, l'excitation sera modélisée comme une bobine à air alimentée par des courants constants ;

3. machine synchrone à pôles saillants, sans amortisseurs, avec excitation bobinée ;

4. machine synchrone à pôles saillants, sans amortisseurs, à aimants permanents. Ces aimants sont habituellement « enterrés » dans le rotor ;

5. machine synchrone à pôles lisses, avec amortisseurs et excitation bobinée ;

6. machines synchrones à pôles saillants, avec amortisseurs et excitation bobinée.

On pourrait ne présenter que le dernier cas, le plus complexe, et considérer que tous les autres cas sont des cas particuliers qui s'en déduisent par élimination ou simplification de tel ou tel élément. Mais par soucis de progressivité et de simplicité, nous décrirons et modéliserons les trois cas que nous considérons comme le plus représentatifs :

– le cas le plus simple : la machine à pôles lisses à excitation constante (sans amortisseurs), ce qui modélise aussi les machines à aimants déposés en surface, paragraphe 3.5.1.2.2 ;

---

5. « Direct » et « en quadrature » : vocabulaire d'origine anglo-saxonne, établi dans le cadre des modélisations en régime transitoire des machines synchrones.

6. « Longitudinal » et « transversal » : vocabulaire d'origine française, établi dans le cadre des études en régime permanent des machines synchrones à pôles saillants.

– le cas le plus utile pour la commande de machines : la machine à pôles saillants et excitation bobinée (sans amortisseurs), paragraphe 3.5.1.3 ;

– le cas le plus complet : la machine à pôles saillants, avec excitation bobinée et avec amortisseurs, paragraphe 3.5.1.4.

Dans ces paragraphes, nous présenterons la forme matricielle des équations, et nous détaillerons les éléments des matrices dans le paragraphe 3.5.1.5. Pour les exemples les plus caractéristiques, nous présenterons comment un cas plus complexe peut se ramener à un cas plus simple (exemple, comment passer des pôles saillants aux pôles lisses).

3.5.1.2. *Machine synchrone à pôles lisses (sans amortisseurs)*

3.5.1.2.1. Description de la machine à excitation bobinée

La figure 3.39 donne un exemple de machine synchrone à pôles lisses représentée de façon idéalisée, avec des angles électriques. On ne représente donc qu'une paire de pôles. La machine réelle voit se répéter *p* fois ce motif. On y distingue un stator triphasé dont les phases sont notées *a*, *b* et *c* (des auteurs précisent l'indice *s* du stator : *sa*, *sb*, *sc*). L'encoche notée *a* contient $n_s = N_s / 2.p$ conducteurs « aller », et l'encoche notée *a'* contient le même nombre de conducteurs « retour ». On observe qu'il y a donc $p.2.N_s / 2.p = N_s$ conducteurs en série, et $N_s / 2$ spires en série. Dans les modèles, il faut multiplier le nombre de spires par le coefficient de bobinage $k_s$ pour tenir compte de la construction effective de la machine. Le rotor est à pôles lisses. Il contient un enroulement monophasé d'excitation indicé *f*. L'angle $\theta$ repère la position mécanique de l'axe du rotor (c'est-à-dire, l'axe de symétrie de l'enroulement *f*).

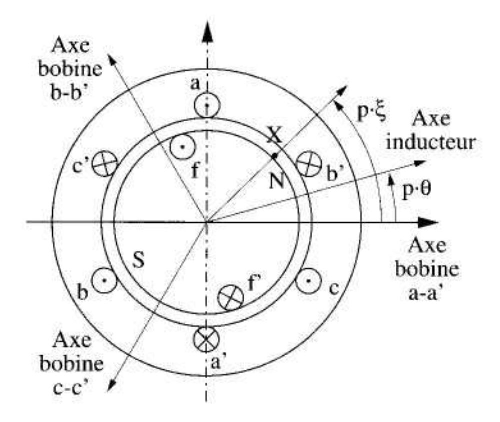



**Figure 3.39.** *Exemple d'une machine synchrone (à pôles lisses et sans amortisseurs), en représentation idéalisée*

La figure 3.41 donne un schéma équivalent symbolique. Nous considérerons que le modèle de cette machine peut se déduire du modèle plus général de la machine à pôles saillants (décrite dans le paragraphe 3.5.1.3.1, modélisée dans le paragraphe 3.5.1.3.2) en annulant le terme de saillance (on posera $p_2 = 0$ dans les formules).

3.5.1.2.2 Description de la machine synchrone à pôles lisses et excitation par aimants

La figure 3.40 représente en coupe une machine asynchrone triphasée, à pôles lisses, et à excitation par aimants.

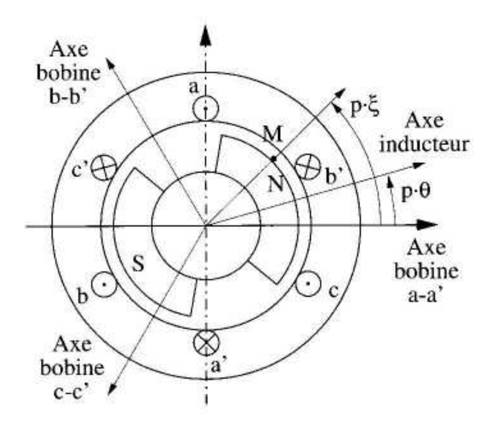



**Figure 3.40.** *Coupe d'une machine synchrone à pôles lisses à excitation par aimants*

Pour la modélisation de cette machine, on admettra qu'elle peut se ramener au cas précédent, *les aimants étant représentés par des enroulements bobinés dans l'air et parcourus par des courants constants*. Cette machine a donc même schéma symbolique que la machine à excitation bobinée (voir figure 3.41).

3.5.1.2.3. Modélisation matricielle de la machine synchrone à aimants et pôles lisses (sans amortisseurs)

Les deux machines précédemment décrites peuvent être représentées par le même schéma équivalent symbolique (figure 3.41). Dans ce paragraphe, nous considérons particulièrement le cas le plus simple, celui de la machine synchrone à pôles lisses excités par des aimants. On a modélisé ceux-ci par un bobinage parcouru par un courant constant noté $I_f$. La machine est lisse, donc la perméance superficielle se réduit à $p_0$ (formule [3.44]). Nous donnons son modèle sous forme matricielle. Nous définissons d'abord les variables, c'est-à-dire les flux, les courants et les tensions statoriques $\psi_{s3}, i_{s3}, v_{s3}$, où :

$$\psi_{s3} = \begin{pmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{pmatrix}, \quad i_{s3} = \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix}, \quad v_{s3} = \begin{pmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{pmatrix} \qquad [3.79]$$

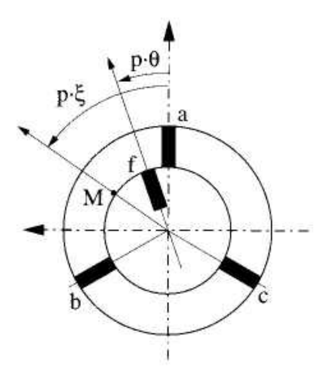



**Figure 3.41.** *Machine synchrone à pôles lisses et sans amortisseurs, en représentation symbolique*

La dernière variable est le courant d'excitation, supposé constant et noté $I_f$. La forme matricielle des équations aux flux est :

$$\psi_{s3} = L_{ss}.i_{s3} + M_{sf}(\theta).I_f \qquad [3.80]$$

Les expressions des matrices $L_{ss}$ et $M_{sf}$ se déduisent des formules démontrées dans le cas plus général des machines à pôles saillants, en posant que le paramètre $p_2$ est nul. Pour $L_{ss}$, qui est constante, voir le paragraphe 3.5.1.5.1 et la formule [3.105] (où l'on omet habituellement les indices 0). Pour $M_{sf}(\theta)$, voir le paragraphe 3.5.1.5.2 et les formules [3.110] et [3.111] où l'on pose $p_2 = 0$. On note $R_s$ la résistance d'une phase statorique et les équations aux tensions sont limitées aux équations statoriques, dont la forme générale est la suivante :

$$v_{s3} = R_s.v_{s3} + \frac{d\psi_{s3}}{dt} \qquad [3.81]$$

La co-énergie du système a l'expression suivante :

$$W_{cm} = \int_{(0)}^{(i_{s3})} \psi_{s3}{}^{t}(i_{s3}{}').di_{s3}{}' \qquad [3.82]$$

d'où :

$$W_{cm} = \frac{1}{2} i_{s3}{}^{t}.(L_{ss})^{t}.(i_{s3}) + I_f.(M_{sf}(\theta))^{t}.(i_{s3}) \qquad [3.83]$$

Alors, l'expression générale du couple est :

$$C_{em} = \frac{\partial W_{cm}}{\partial \theta} = I_f . \left( \frac{\partial M_{sf}(\theta)}{\partial \theta} \right)^{t} .(i_{s3}) \qquad [3.84]$$

Pour cette machine à pôles lisses, la matrice $(L_{ss})$ est à coefficients constants, indépendants de l'angle $\theta$. Seule la matrice des mutuelle stator-rotor dépend de la position $\theta$, et la conversion d'énergie est liée à ses propriétés.

3.5.1.3. *Machine synchrone à pôles saillants, à excitation bobinée, sans amortisseurs*

3.5.1.3.1. Description

La figure 3.42 donne la coupe d'une machine à pôles saillants. Dans ce cas, les enroulements inducteurs sont bobinés autour de pièces polaires.

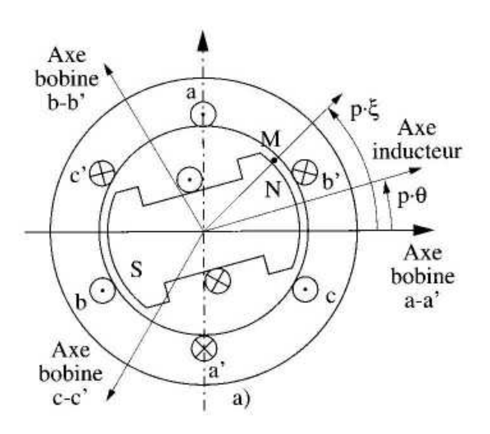



**Figure 3.42.** *Coupe d'une machine synchrone à pôles saillants*

Pour la modélisation des machines synchrones en vue de leur commande en moteur, c'est cette variante qu'il faut le plus souvent considérer, car on peut se ramener aux autres cas importants :

– pour les machines à pôles lisses, on pose $p_2 = 0$ dans l'expression de la perméance superficielle [3.45] ;

– pour les machines à aimant, on suppose que le courant d'excitation est constant.

3.5.1.3.2. Modélisation de la machine synchrone à excitation bobinée et pôles saillants (sans amortisseurs)

Cet exemple possède les mêmes variables statoriques que l'exemple du paragraphe 3.5.1.2.3 ($\psi_{s3}, i_{s3}, v_{s3}$, voir les définitions de la formule [3.79] et le schéma équivalent 3.41), mais il faut aussi prendre en compte explicitement les variables rotoriques, c'est-à-dire le flux d'excitation : $\psi_f$, le courant d'excitation $i_f$ et la tension d'excitation $v_f$, qui sont en général variables. Enfin, la machine étant à pôles saillants, les éléments de la matrice des inductances statoriques varient en fonction de $\theta$ ; dans ces conditions, le modèle relatif aux flux est, sous forme matricielle, du type suivant :

$$\begin{aligned} \psi_{3s} &= L_{ss}(\theta).i_{s3} + M_{sf}(\theta).i_f \\ \psi_f &= M_{fs}(\theta).i_{s3} + L_f.i_f \end{aligned} \qquad [3.85]$$

La matrices $L_{ss}(\theta)$ est symétrique et sera calculée au paragraphe 3.5.1.5.1 (formules [3.102] à [3.109]). Les matrices $M_{sf}(\theta)$ et $M_{fs}(\theta)$ sont transposées l'une de l'autre. La matrice $M_{sf}(\theta)$ sera calculée au paragraphe 3.5.1.5.2 (formules [3.110] et [3.111]). Le terme $L_f$ est un scalaire. Les équations aux tensions statoriques ont la même forme qu'au paragraphe 3.5.1.2.3 (formule [3.81]). On doit y ajouter l'équation de la tension rotorique :

$$v_f = R_f.i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \qquad [3.86]$$

La co-énergie a pour expression (nous utilisons le fait que le transposé d'un scalaire est identique à ce scalaire) :

$$W_{cm} = \int_{(0)}^{(i_{s3}),i_f} \psi_{s3}{}^t(i_{s3}').di_{s3}' + \psi_f.di_f \qquad [3.87]$$

L'intégrale [3.87] se calcule explicitement :

$$W_{cm} = \frac{1}{2} i_{s3}{}^t.(L_{ss}(\theta))^t.(i_{s3}) + I_f.(M_{sf}(\theta))^t.(i_{s3}) + \frac{1}{2}.L_f.i_f{}^2 \qquad [3.88]$$

Enfin, nous en déduisons l'expression générale du couple :

$$C_{em} = \frac{\partial W_{cm}}{\partial \theta} = i_{s3}{}^{t}.\left(\frac{\partial L_{ss}(\theta)}{\partial \theta}\right)^{t}.(i_{s3}) + i_f.\left(\frac{\partial M_{sf}(\theta)}{\partial \theta}\right)^{t}.(i_{s3}) \qquad [3.89]$$

Pour revenir aux machines à pôles lisses, nous observons que l'on retrouve bien les résultats du paragraphe 3.5.1.2.3 en supposant que $L_{ss}$ est une matrice constante, donc sa dérivée par rapport à $\theta$ est nulle, et en posant que le courant $i_f$ est constant (voir formule [3.84]).

3.5.1.4. *Description de la machines à pôles saillants avec amortisseurs*

3.5.1.4.1. Description

La figure 3.32 a donné le schéma d'une machine synchrone avec amortisseurs. Dans le cas d'une machine à pôles saillants comme celle de la figure 3.42, les amortisseurs sont des barres situées dans les pièces polaires et la cage d'amortisseurs n'est pas complète. L'anneau de court-circuit peut être complet, mais il peut être aussi coupé.

Nous pouvons noter ici que sont regroupés tous les différents cas possibles d'enroulements : il y a un enroulement triphasé au stator, et nous pouvons observer qu'il crée des forces magnétomotrices données par les formules [3.60] et [3.62]. Au rotor il y a l'excitation, qui est un enroulement monophasé qui crée une force magnétomotrice donnée par la formule [3.59], et enfin il y a l'amortisseur représenté par un enroulement diphasé qui crée une force magnétomotrice donnée par les formules [3.63]. Enfin, l'expression de la perméance superficielle doit être l'expression générale contenant le terme $p_2$ dû à la saillance (voir formule [3.45]).

3.5.1.4.2. Modélisation de la machine synchrone à excitation bobinée et pôles saillants, avec amortisseurs

Nous avons donné, figure 3.33, le schéma équivalent symbolique de cette machine. Les variables sont les mêmes grandeurs statoriques qu'aux paragraphes précédents ($\psi_{s3}, i_{s3}, v_{s3}$ ,voir les définitions [3.79]), les mêmes variables relatives à l'excitation : $\psi_f, i_f, v_f$ , auxquelles s'ajoutent maintenant les variables rotoriques des amortisseurs, les flux, les courants et les tensions $\psi_{DQ}, i_{DQ}, v_{DQ}$ , dont les détails sont :

$$\psi_{DQ} = \begin{pmatrix} \psi_D \\ \psi_Q \end{pmatrix},\ i_{DQ} = \begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \end{pmatrix},\ v_{DQ} = \begin{pmatrix} v_D \\ v_Q \end{pmatrix} \qquad [3.90]$$

Puisque cet exemple est le plus général, il est intéressant d'en donner le modèle complet. Pour les flux, nous donnons une équation matricielle globale de la forme $[\psi] = [L].[i]$, mais nous définissons la matrice $[L]$ et les vecteurs $[\psi]$ et $[i]$ sous une forme partitionnée qui met en évidence les propriétés les plus intéressantes de ces grandeurs :

$$\begin{bmatrix} \psi_{s3} \\ \psi_f \\ \psi_{DQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss}(\theta) & M_{sf}(\theta) & M_{sDQ}(\theta) \\ M_{fs}(\theta) & L_f & M_{fDQ} \\ M_{DQs}(\theta) & M_{DQf} & L_{DQ} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_{s3} \\ i_f \\ i_{DQ} \end{bmatrix} \qquad [3.91]$$

Les matrices de la diagonale principale sont symétriques : $L_{ss}(\theta)$, qui est de dimension $3 \times 3$, $L_f$ (qui est un scalaire, par ailleurs), $L_{DQ}(\theta)$ qui est de dimension $2 \times 2$. Les matrices qui sont symétriques par rapport à la diagonale principale sont transposées les unes par rapport aux autres : $M_{sf}(\theta)$, de dimension $3 \times 1$, est transposée de transposée de $M_{fs}(\theta)$ qui est de dimension $1 \times 3$ ; $M_{sDQ}(\theta)$, qui est de dimension $3 \times 2$ est transposée de $M_{DQs}(\theta)$ qui est de dimension $2 \times 3$. La matrice $M_{fDQ}(\theta)$, qui est de dimension $1 \times 2$ est transposée de $M_{DQf}(\theta)$ qui est dimension $2 \times 1$. Toutes les matrices dépendent de la position $\theta$, sauf $L_f$, $M_{fDQ}$ et $L_{DQ}$. Les plus importantes de ces matrices seront calculées dans le paragraphe 3.5.1.5. Soit donc :

$$L_{ss}(\theta)^t = L_{ss}(\theta) \qquad [3.92]$$

$$L_{DQ}{}^t = L_{DQ} \qquad [3.93]$$

$$M_{fs}(\theta)^t = M_{sf}(\theta) \qquad [3.94]$$

$$M_{DQs}(\theta)^t = M_{sDQ}(\theta) \qquad [3.95]$$

$$M_{DQf}{}^t = M_{fDQ} \qquad [3.96]$$

Les équations aux tensions sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} v_{s3} \\ v_f \\ v_{DQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s.I_3 & 0 & 0 \\ 0 & R_f & 0 \\ 0 & 0 & R_{DQ} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_{s3} \\ i_f \\ i_{DQ} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s3} \\ \psi_f \\ \psi_{DQ} \end{bmatrix} \qquad [3.97]$$

où $R_{DQ} = \begin{bmatrix} R_D & 0 \\ 0 & R_Q \end{bmatrix}$ et $I_3$ est la matrice unité de rang 3. Pour les tensions des amortisseurs, on doit tenir compte du fait qu'en général, les résistances $R_D$ et $R_Q$ des enroulements équivalents $D$ et $Q$ sont différentes. Enfin, les amortisseurs sont court-circuités, donc :

$$\begin{pmatrix} v_D \\ v_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [3.98]$$

L'expression générale de la co-énergie magnétique est :

$$W_{cm} = \int_{(0)}^{(i_{s3}),i_f,(i_{DQ})} \psi_{s3}{}^t(i_{s3}').di_{s3}' + \psi_f.di_f + \psi_{DQ}{}^t(i_{s3}').di_{DQ}' \quad [3.99]$$

L'intégrale [3.99] se calcule explicitement :

$$\begin{aligned} W_{cm} &= \frac{1}{2} i_{s3}{}^t.(L_{ss}(\theta))^t.(i_{s3}) + i_f.(M_{sf}(\theta))^t.(i_{s3}) + \frac{1}{2}.L_f.i_f{}^2 \\ &+ i_{DQ}{}^t.\left(M_{sDQ}(\theta)\right)^t.i_{s3} + i_{DQ}{}^t.\left(M_{fDQ}\right)^t.i_f + \frac{1}{2} i_{DQ}{}^t.\left(L_{DQ}\right).i_{DQ} \end{aligned} \quad [3.100]$$

Enfin, nous en déduisons l'expression générale du couple :

$$\begin{aligned} C_{em} &= \frac{\partial W_{cm}}{\partial \theta} = i_{s3}{}^t.\left(\frac{\partial L_{ss}(\theta)}{\partial \theta}\right)^t.(i_{s3}) \\ &+ i_f.\left(\frac{\partial M_{sf}(\theta)}{\partial \theta}\right)^t.(i_{s3}) + i_{DQ}{}^t.\left(\frac{\partial M_{sDQ}(\theta)}{\partial \theta}\right)^t.i_{s3} \end{aligned} \quad [3.101]$$

Nous observerons que l'on peut retrouver les résultats des paragraphes précédents par simplifications successives : en supprimant les courants des amortisseurs, ou en supposant la machine à pôles lisses (et alors la dérivée $\partial L_{ss}(\theta)/\partial\theta$ est nulle), ou en supposant que le courant d'excitation $i_f$ est constant (machine à aimant).

#### 3.5.1.5. *Formules explicites des éléments des matrices de la machine synchrone*

Il nous faut maintenant donner les expressions détaillées des éléments des matrices qui ont été définies dans tous ces modèles. Nous le traiterons dans le cas le plus général (machine à pôles saillants, en particulier) en indiquant les simplifications

dans les cas plus particuliers. Les résultats sont obtenus à partir de la formule la plus générale (voir les équations [3.75] à [3.77]). Il faut particulariser les termes aux différents cas rencontrés. Les paramètres constructifs sont définis par le nombre de conducteurs en série dans chaque phase du stator : $N_s$, et le coefficient de bobinage relatif au premier harmonique : $k_s$. On considère les mêmes types de paramètres pour l'excitation : $N_f$ et $k_f$; et pour les enroulements diphasés équivalents pour les amortisseurs : pour l'axe $D$ : $N_D$ et $k_D$, et pour l'axe $Q$ : $N_Q$ et $k_Q$. On suppose aussi connus les paramètres $p_0$ et $p_2$ de l'expression de la perméance superficielle.

3.5.1.5.1. Expression des éléments des matrices « inductances propres du stator »

Dans le cas des inductances statoriques, plusieurs remarques sont à faire. D'abord, les termes sont de deux types :

– les termes constants, qui existent toujours, en particulier pour les machines à pôles lisses ;

– les termes variables, qui dépendent d'ailleurs de l'angle $2.\theta$, et qui n'existent que dans le cas des machines à pôles saillants. Il est donc naturel de poser :

$$L_{ss}(\theta) = L_{ss0} + L_{ss2}(\theta) \qquad [3.102]$$

où la matrice $L_{ss0}$ regroupe les termes constants et $L_{ss2}(\theta)$ regroupe les termes variables. La matrice $L_{ss0}$ *additionne deux sortes de termes* : les termes relatifs aux fuites et les termes relatifs au flux principal dépendant du coefficient $p_0$ (voir [3.76]). La matrice $L_{ss2}$ ne contient que des termes relatifs au flux principal dépendant du coefficient $p_2$. Pour appliquer les formules [3.75] à [3.77], il faut définir les coefficients spécifiques relatifs aux bobinages du stator : les formules distinguent les enroulements « inducteurs », indicés $\gamma$, et les enroulements « induits » indicés $\delta$. Dans le cas considéré, il s'agit toujours des enroulements statoriques. On a donc : $k_1^{\delta} = k_1^{\gamma} = k_s$ et $N_{\delta} = N_{\gamma} = N_s$.

Considérons les termes de fuite $l_{\delta\gamma}$ : à cause des symétries de la machines, les inductances de fuite propres (cas $\delta = \gamma$ ) sont toutes identiques, et nous les noterons $l_s$ : $l_{\delta\delta} = l_s$ ; toutes les mutuelles de fuite (cas $\delta \neq \gamma$ ) sont égales, et nous les notons $m_s$ : $l_{\delta\gamma} = m_s$. Rappelons que dans la littérature, ce dernier terme est souvent considéré nul.

Considérons maintenant les termes constants dus au flux principal. Ils sont donnés par la formule [3.76]. Appliqués au cas des inductances et des mutuelles statoriques, ces formules permettent de déterminer seulement deux termes distincts :

– les inductances propres, situées sur la première diagonale de $L_{ss}$, notées $L_{ps0}$ ; elles sont toutes égales, les angles donnant les directions des axes des enroulements vérifient tous $\xi_\delta = \xi_\gamma$, donc $\cos\left[p.\left(\xi_\delta - \xi_\gamma\right)\right] = 1$ ; aussi leur expression est :

$$L_{ps0} = \frac{2.L.D}{\pi}.\left(\frac{k_s.N_s}{2.p}\right)^2.p_0 \qquad [3.103]$$

– et les inductances mutuelles, notées $M_{ps0}$, sont aussi toutes égales et les angles qui donnent les directions des axes vérifient : $\left[p.\left(\xi_\delta - \xi_\gamma\right)\right] = \pm 2.\pi/3$, donc $\cos\left[p.\left(\xi_\delta - \xi_\gamma\right)\right] = -1/2$ et leur expression est :

$$M_{pss0} = -\frac{1}{2}.L_{pss0} \qquad [3.104]$$

On écrit habituellement la matrice des termes constants sous une forme compacte, qui ne dépend que de deux paramètres. Cette forme ne distingue pas les termes dus au champ principal et les termes dus aux champs de fuite :

$$L_{ss0} = \begin{pmatrix} L_{s0} & M_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & L_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & M_{s0} & L_{s0} \end{pmatrix} \qquad [3.105]$$

avec :

$$L_{s0} = L_{ps0} + l_s \qquad [3.106]$$

$$M_{s0} = M_{ps0} + m_s = -\frac{1}{2}.L_{ps0} + m_s \qquad [3.107]$$

Pour les termes variables, qui n'existent que dans les machines à pôles saillants, les formules générales (voir [3.75] et [3.77]) montrent qu'ils ont tous la même amplitude, qui vaut :

$$L_{s2} = L_{ps2} = \frac{2.L.D}{\pi}.\left(\frac{k_s.N_s}{2.p}\right)^2.\frac{p_2}{2} \qquad [3.108]$$

Les angles $\xi_\delta$ et $\xi_\gamma$ valent 0 ou $2.\pi/3$ ou $-2.\pi/3$ et la matrice $L_{ss2}(\theta)$ a pour expression :

$$L_{s2}(\theta) = L_{s2}.\begin{bmatrix} \cos(2.p.\theta) & \cos\left(2.p.\theta - \frac{2.\pi}{3}\right) & \cos\left(2.p.\theta + \frac{2.\pi}{3}\right) \\ \cos\left(2.p.\theta - \frac{2.\pi}{3}\right) & \cos\left(2.p.\theta + \frac{2.\pi}{3}\right) & \cos(2.p.\theta) \\ \cos\left(2.p.\theta + \frac{2.\pi}{3}\right) & \cos(2.p.\theta) & \cos\left(2.p.\theta - \frac{2.\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad [3.109]$$

Dans le cas des machines à pôles saillants, l'expression générale de la matrice des inductances statoriques est sans doute la plus complexe de celles que l'on rencontre dans les machines à courant alternatif classiques. Le terme de saillance introduit d'ailleurs des forces contre-électromotrices spécifiques et des termes également spécifiques dans l'expression du couple électromagnétique. Ces termes sont particulièrement exploités dans le cas des « machines synchrones réluctantes » qui ont une forte saillance et pas d'excitation.

3.5.1.5.2. Expression des éléments des matrices inductances mutuelles entre le stator et l'excitation

Considérons $M_{sf}(\theta)$ et les formules générales [3.75] à [3.77]. Le terme inducteur, indicé $\gamma$, est l'excitation, indicée $f$. Les termes induits, indicés $\delta$, sont ceux du stator dont les indices sont $a$, $b$ ou $c$, *donc* $\delta = a$ ou $\delta = b$ ou $\delta = c$, mais comme les trois phases sont identiques, on n'utilisera que l'indice $s$, donc : $\delta = s$. L'excitation, indicée $\gamma$ dans le cas général, est indicée $f$ dans ce cas. On notera donc : $k_1^{\delta} = k_1^{\gamma} = k_s$, $N_\delta = N_\gamma = N_s$, $k_1^{\gamma} = k_f$ et $N_\gamma = N_f$. Alors la matrice $M_{sf}(\theta)$ a pour expression générale :

$$M_{sf}(\theta) = M_0.\begin{bmatrix} \cos(p.\theta) \\ \cos(p.\theta - 2.\pi/3) \\ \cos(p.\theta + 2.\pi/3) \end{bmatrix} \quad [3.110]$$

avec :

$$M_0 = \frac{2.L.D}{\pi}.\frac{k_s.N_s}{2.p}.\frac{k_f.N_f}{2.p}.\left(p_0 + \frac{p_2}{2}\right) \quad [3.111]$$

Dans le cas des machines à pôles lisses (paragraphe 3.5.1.2), on pose $p_2 = 0$ dans la formule [3.111].

3.5.1.5.3. Expression de l'inductance propre de l'enroulement d'excitation

On peut démontrer (et pour les machines à pôles lisses, le terme $p_2$ est nul) :

$$L_f = \frac{2.L.D}{\pi} \cdot \left( \frac{k_f.N_f}{2.p} \right)^2 \cdot \left( p_0 + \frac{p_2}{2} \right) \qquad [3.112]$$

3.5.1.5.4. Expression des éléments des matrices inductances mutuelles entre le stator et les enroulements amortisseurs

La matrice $M_{sDQ}(\theta)$ a comme induit les phases du stator, donc dans les formules les indices $\delta$ valent $a$ ou $b$ ou $c$, mais comme ces phases sont identiques, nous n'utiliserons que l'indice $\delta = s$, et les enroulements inducteurs, indicés $\gamma$ en général, seront les enroulements $D$ et $Q$. La matrice $M_{sDQ}(\theta)$ s'écrit avec deux amplitudes $M_{aD}$ et $M_{aQ}$. Sa forme générale est :

$$M_{sDQ}(\theta) = \begin{pmatrix} M_{aD}.\cos(p.\theta) & -M_{aQ}.\sin(p.\theta) \\ M_{aD}.\cos(p.\theta - 2.\frac{\pi}{3}) & -M_{aQ}.\sin(p.\theta - 2.\frac{\pi}{3}) \\ M_{aD}.\cos(p.\theta + 2.\frac{\pi}{3}) & -M_{aQ}.\sin(p.\theta + 2.\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \qquad [3.113]$$

3.5.1.5.5. Expression des éléments des matrices inductances mutuelles entre l'excitation et l'amortisseur

La matrice $M_{fDQ}(\theta)$ est constante puisque l'excitation et l'amortisseur sont sur le rotor (donc sur la même armature) ; ils sont donc dans la même position relative, et le stator étant lisse, la variation de la position du rotor ne modifie pas la géométrie des circuits magnétiques vus par les lignes de champ créés par ces deux enroulements.

En outre, l'axe de l'enroulement d'amortisseur d'axe $Q$ est orthogonal à l'axe de l'enroulement d'excitation. La matrice $M_{fDQ}(\theta)$ a la forme suivante :

$$M_{fDQ}(\theta) = \begin{bmatrix} M_{fD} & 0 \end{bmatrix} \qquad [3.114]$$

### 3.5.2. *Description et modélisation des machines asynchrones*

#### 3.5.2.1. *Généralités*

Les machines asynchrones peuvent être définies de façon très simple : ce sont des machines à stator triphasé, à rotor polyphasé habituellement en court-circuit, et l'entrefer est constant. Ce sont donc des machines à pôles lisses.

Les machines asynchrones sont les machines électriques les plus répandues car les plus économiques à fabriquer. Ce sont aussi des machines difficiles à commander. Le rotor tourne à une vitesse différente de celle du synchronisme (d'où son nom « asynchrone », les anglo-saxons disent *induction machine*). Cette différence est mesurée par le glissement $g$ :

$$\Omega = (1-g).\frac{\omega}{p} \qquad [3.115]$$

On peut démontrer que si le stator est alimenté par des courants sinusoïdaux de pulsation $\omega_1$, alors les enroulements du rotor sont parcourus par des courants sinusoïdaux de pulsation $\omega_2$. Cette pulsation vérifie :

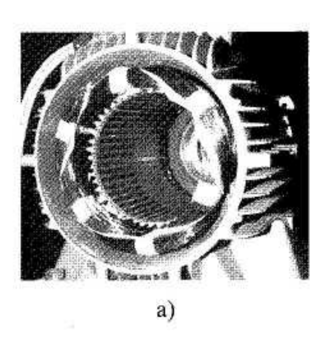
$$\omega_2 = g.\omega_1 \qquad [3.116]$$

Les stators sont tous à peu près du même type. A cause des propriétés non linéaires de son fonctionnement en fonction de la vitesse, cette machine pose des problèmes au démarrage. Pour résoudre ces problèmes, on a conçu différents types de rotors.

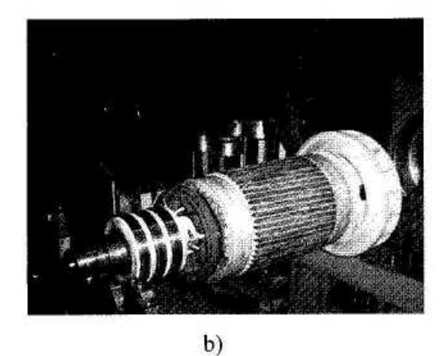
#### 3.5.2.2. *Les stators des machines asynchrones*

Les stators des machines asynchrones sont bobinés, triphasés, et très proches par leur construction des stators des machines synchrones (voir figure 3.39). Ils sont construits avec des tôles qui sont feuilletées et isolées entre elles pour minimiser les pertes ferromagnétiques. Le stator est maintenu par une carcasse en fonte ou en acier. Les conducteurs des phases sont situés dans des encoches fermées ou semi-fermées. Le nombre d'encoches du stator ne doit pas interférer avec le nombre d'encoches du rotor pour éviter les effets d'attractions qui créent des ondulations de couple.

La figure 3.28 donne une représentation du stator valable pour une machine asynchrone.



a)



b)

**Figure 3.43.** *a) Stator de machine asynchrone (Photo JPC, © ALSTOM, 1999). b) Rotor bobiné d'une machine asynchrone (on distingue les trois bagues au premier plan)(Photo JLT)*

3.5.2.3. *Les différents types de rotors des machines asynchrones*

Dans leur très grande majorité, ces machines ont un rotor à « cage simple » qui n'est pas alimenté, les « barres » de la cage étant mis en court-circuit par des anneaux de « court-circuit » (voir figure 3.43b). L'excitation de ces machines n'est pas créée directement et elles ont un comportement fortement non linéaire. Cela est particulièrement marqué au démarrage pendant lequel la vitesse est faible et la pulsation rotorique élevée : si $\Omega$ est nulle, alors $\omega_1 = \omega_2$, et la machine se comporte comme un « transformateur à champ tournant » ; le facteur de puissance est peu élevé, et la machine absorbe un fort courant (dangereux), tout en produisant un couple relativement faible, ce qui allonge le temps de démarrage. En effet, idéalement, il faudrait qu'au démarrage les enroulements rotoriques aient des résistances élevées pour augmenter le facteur de puissance ; on aurait alors un couple de démarrage plus élevé et une amplitude des courants plus faibles. Par contre, en fonctionnement normal (où la vitesse est proche de la vitesse de synchronisme, aussi la pulsation rotorique est faible, environ quelques pourcents de la pulsation statorique), il faudrait que la résistance rotorique soit la plus faible possible pour avoir un bon rendement. On voit donc qu'il y a là une contradiction.

Plusieurs solutions ont été apportées à ce problème :

– 1$^{er}$ cas : *usage d'une machine à rotor bobiné* : ce rotor est nettement plus coûteux que les rotors à cage, puisqu'il faut fabriquer des phases bobinées, dont les conducteurs sont placés dans des encoches ouvertes ou semi-fermées. On peut accéder aux enroulements rotoriques grâce à un système de bagues et de balais. On peut alors connecter les enroulements rotoriques à différents dispositifs. Si ce dispositif est une autre machine asynchrone ou un convertisseur statique, on parle de « cascade ». Le dispositif à connecter le plus simple est composé de résistances

variables qui ont une valeur élevée au démarrage, et que l'on élimine au fonctionnement normal (on les court-circuite) ;

– 2$^{e}$ cas : *usage d'une machine à rotor à cage normale*, mais dimensionnée de façon que la valeur de la résistance rotorique soit *assez grande* pour imposer au démarrage un couple suffisamment élevé et des courants d'amplitudes suffisamment limitées (par exemple, six fois l'amplitude du courant nominal) ; mais cette valeur de la résistance rotorique doit être *aussi assez petite* pour ne pas entraîner trop de pertes (donc un rendement trop faible) au fonctionnement nominal. En petite puissance, les barres sont en aluminium. Le choix de la valeur de la résistance rotorique est un compromis qui n'est optimal ni au démarrage, ni au fonctionnement nominal ;

– 3$^{e}$ cas : *usage de rotor à cages spéciales*. Pour améliorer les performances au démarrage, on peut avoir recours à des cages dont l'impédance apparente varie suivant la fréquence : au démarrage (fréquence rotorique élevée) la résistance rotorique apparente est forte ; au fonctionnement nominal (fréquence rotorique basse) la résistance rotorique apparente est faible. Ces cages utilisent des propriétés de répartition du champ que l'on peut obtenir par deux moyens techniques :

- 1$^{re}$ technique : par des *encoches profondes*. On utilise « l'effet de peau », ou « effet pelliculaire », (à 50 Hz, la profondeur de pénétration dans le cuivre est d'environ 1 cm) qui donne aux impédances des enroulements les propriétés recherchées ;

- 2$^{e}$ technique : par des *doubles cages* avec des dimensionnements très spécifiques. La cage extérieure (« cage de démarrage ») est très résistante (conducteurs en laiton ou en aluminium de petite section) et peu inductive ; c'est la cage qui sert au démarrage. La cage intérieure est peu résistante et plus inductive ; c'est surtout elle qui sert en fonctionnement normal (« cage de travail »). Les cages spéciales sont optimisées pour les alimentations par un réseau à fréquence fixe et ne sont guère utilisées avec des alimentations à fréquence variable. Mais la connaissance de ces machines permet de mieux comprendre les propriétés des machines asynchrones quand l'effet de peau intervient [RIU 00] ;

– 4$^{e}$ cas : les machines réellement destinées à la vitesse variable sont alimentées par un onduleur à fréquence réglable qui règle à la fois l'amplitude et la fréquence des signaux d'alimentation. On utilise alors des machines à rotors à cage simple, peu résistives. Ce sont donc les machines que nous étudierons principalement dans ce chapitre. Comme nous l'avons exposé à propos des cages (voir paragraphe 3.3.3.4.2), *nous admettrons que celles-ci peuvent être représentées par des enroulements bobinés triphasés équivalents*. Cette hypothèse nous permettra de donner *une seule modélisation* pour les deux types de machines asynchrones considérés : les machines à rotor bobiné et les machines à rotor à cage simple. Dans ce dernier cas, nous devrons tenir compte du fait que la cage est en court-circuit et nous écrirons que les tensions d'alimentation de la cage sont toujours nulles. Un schéma équivalent symbolique est donné par la figure 3.44.

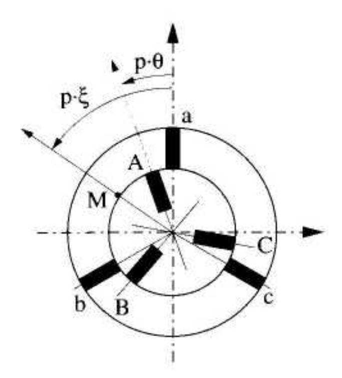



**Figure 3.44.** *Schéma symbolique d'une machine asynchrone*

Dans ce cadre, les forces magnétomotrices créées par le stator sont données par les formules [3.60] et les forces magnétomotrices créées par le rotor sont données par les formules [3.64].

3.5.2.4. *Modélisation de la machine asynchrone*

3.5.2.4.1. Forme des équations aux flux et aux tensions

La machine asynchrone est plus simple à mettre en équation : c'est une machine à pôles lisses, et dans l'expression de la perméance superficielle, on ne conserve que le terme constant $p = p_0 = \mu_0 / e$ (voir formule [3.44]). Cela a pour effet que les inductances propres des deux armatures (stator et rotor) sont constantes, c'est-à-dire indépendantes de la position du rotor. Seules les mutuelles entre le stator et le rotor sont variables et dépendent de la position $\theta$ du rotor.

En outre, la machine est supposée « bien construite », c'est-à-dire à distribution sinusoïdale du champ, ses matériaux sont linéaires, en particulier les matériaux magnétiques ne sont pas saturés. Enfin, la machine asynchrone est supposée constituée au stator comme au rotor d'enroulements triphasés symétriques : les trois phases sont identiques (mêmes nombres de spires, mêmes types de bobinage) et simplement décalées dans l'espace d'un angle égal à $2.\pi / 3.p$.

Au stator, les paramètres constructifs sont donnés par le nombre de conducteurs en série dans chaque phase du stator : $N_s$, et le coefficient de bobinage relatif au premier harmonique : $k_s$. On définit les mêmes types de paramètres pour le rotor : $N_r$ et $k_r$. Fréquemment, le stator est considéré comme un « primaire » et le rotor comme un « secondaire » ; on pose alors : $N_s = N_1$, $k_s = k_1$, $N_r = N_2$ et $k_r = k_2$.

Les grandeurs statoriques et rotoriques sont décrites par des vecteurs qui ont tous trois composantes. Au stator, le vecteur des flux est noté : $\psi_{s3}$, le vecteur des courants est noté $i_{s3}$ et le vecteur des tensions est noté : $v_{s3}$. On peut utiliser, soit un système à deux indices, comme *sa*, *sb* et *sc*, soit un système à un seul indice, comme *a*, *b* et *c* minuscules :

$$\psi_{s3} = \begin{pmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix}, \quad i_{s3} = \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}, \quad v_{s3} = \begin{pmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \qquad [3.117]$$

Au rotor, le vecteur des flux est noté $\psi_{r3}$, le vecteur des courants est noté $i_{r3}$ et le vecteur des tensions est noté $v_{r3}$ ; on peut utiliser un système de notations à deux indices *ra*, *rb* et *rc*, soit un système à un seul indice : *A*, *B* et *C*, majuscules :

$$\psi_{r3} = \begin{pmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{rc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \end{pmatrix}, \quad i_{r3} = \begin{pmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix}, \quad v_{r3} = \begin{pmatrix} v_{ra} \\ v_{rb} \\ v_{rc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} \qquad [3.118]$$

Pour les équations aux flux, nous donnons une équation matricielle globale de la forme $[\psi] = [L].[i]$, mais nous définissons la matrice $[L]$ et les vecteurs $[\psi]$ et $[i]$ sous une forme partitionnée qui met en évidence les propriétés les plus intéressantes des sous-matrices :

$$\begin{bmatrix} \psi_{s3} \\ \psi_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr}(\theta) \\ M_{rs}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_{s3} \\ i_{r3} \end{bmatrix} \qquad [3.119]$$

Et les équations aux tensions :

$$\begin{bmatrix} v_{s3} \\ v_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s.I_3 & 0 \\ 0 & R_r.I_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_{s3} \\ i_{r3} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} . \begin{bmatrix} \psi_{s3} \\ \psi_{r3} \end{bmatrix} \qquad [3.120]$$

3.5.2.4.2. Calcul effectif des matrices des inductances et des mutuelles

Le calcul des éléments se déduit de la formule [3.75], réduite à la seule composante relative aux termes indépendants de $\theta$ ; le terme $L_{p2,\delta\gamma}$ est nul et le terme $L_{p0,\delta\gamma}$ est donné par [3.76]. Dans ces conditions, lorsque l'on applique les formules pour déterminer les éléments des matrices intervenant dans [3.119], on obtient que

les matrices $L_{ss}$ et $L_{rr}$ ne dépendent chacune que de deux paramètres différents, $L_s$ et $M_s$ pour $L_{ss}$, et $L_r$ et $M_r$ pour $L_{rr}$ :

$$L_{ss} = \begin{pmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{pmatrix} \text{ et } L_{rr} = \begin{pmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{pmatrix} \qquad [3.121]$$

avec :

$$L_s = L_{s0} + l_s \text{ et } L_r = L_{r0} + l_r \qquad [3.122]$$

où $L_{s0}$ et $L_{r0}$ (relatifs au champ principal qui traverse l'entrefer) s'écrivent avec les paramètres géométriques et constructifs de la machine :

$$L_{s0} = \frac{2.L.D}{\pi}.\left(\frac{k_1.N_1}{2.p}\right)^2.p_0 \text{ et } L_{r0} = \frac{2.L.D}{\pi}.\left(\frac{k_2.N_2}{2.p}\right)^2.p_0 \qquad [3.123]$$

Et $l_s$ et $l_r$ sont les inductances de fuite des phases statoriques et rotoriques. Les termes de mutuelles $M_{s0}$ et $M_{r0}$, qui sont relatifs au champ principal qui traverse l'entrefer, font intervenir le cosinus des angles entre les phases du stator (phases $a$, $b$ et $c$) et les cosinus des angles entre les phases du rotor (phases $A$, B et $C$), soit $\cos(2.\pi/3) = -1/2$. Alors $M_s$ et $M_r$ ont pour expressions :

$$M_s = M_{s0} + m_s \text{ et } M_r = M_{r0} + m_r \qquad [3.124]$$

où :

$$M_{s0} = -\frac{1}{2}L_{s0} \text{ et } M_{r0} = -\frac{1}{2}L_{r0} \qquad [3.125]$$

et $m_s$ et $m_r$ sont, respectivement, les mutuelles de fuite entre les enroulements de deux phases du stator et entre les enroulements de deux phases du rotor.

De même, la mutuelle $M_{sr}(\theta)$ entre le rotor et le stator ne dépend que d'une seule amplitude, $M_0$, et de l'angle $\theta$, par l'intermédiaire des cosinus des angles entre les axes des phases statoriques et les axes des phases rotoriques. L'application de la formule [3.75], avec $L_{p2,\delta\gamma} = 0$ et [3.76], donne (bien sûr, l'inductance de fuite mutuelle entre le stator et le rotor est nulle) :

$$M_{sr}(\theta) = M_0 . \begin{pmatrix} \cos(p.\theta) & \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) \\ \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta) & \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) \\ \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta) \end{pmatrix} \quad [3.126]$$

où :

$$M_0 = \frac{L.D}{\pi} . \left( \frac{k_1.N_1}{2.p} \right) . \left( \frac{k_2.N_2}{2.p} \right) .2.p_0 \quad [3.127]$$

REMARQUE.– On note la relation suivante :

$$\frac{M_0}{L_{s0}} = \frac{L_{r0}}{M_0} = \frac{k_2.N_2}{k_1.N_1} = m \quad [3.128]$$

où le coefficient $m = k_2.N_2 / k_1.N_1$ est le « rapport de transformation ». Nous ne détaillons pas la matrice, $M_{rs}(\theta)$ qui est la transposée de $M_{sr}(\theta)$ :

$$M_{rs}(\theta) = M_{sr}{}^{t}(\theta) \quad [3.129]$$

3.5.2.5. *Expression du couple de la machine asynchrone*

La co-énergie magnétique a l'expression suivante :

$$W_{cm} = \frac{1}{2} .i_{s3}{}^{t} . \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr}(\theta) \\ M_{rs}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} .i_{r3} \quad [3.130]$$

Seules les matrices de couplage $M_{sr}$ et $M_{rs}$ dépendent de la position $\theta$. Aussi, l'usage de la co-énergie conduit à l'expression suivante du couple :

$$C = \frac{\partial W_{cm}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} .i_{s3}{}^{t} . \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial M_{sr}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_{rs}}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix} .i_{r3} = i_{s3}{}^{t} . \frac{\partial M_{sr}}{\partial \theta} .i_{r3} \quad [3.131]$$

### 3.6. Conclusion

En pratique, les concepteurs de commande de machines à courant alternatif s'appuient sur les modèles des machines synchrones et asynchrones telles que nous les avons établis dans les paragraphes 3.5.1 et 3.5.2. Ces modèles ont des propriétés particulières qui sont mises à profit par les techniques de « transformation » dont les plus célèbres sont la transformation de Park et les « phaseurs ». Ces propriétés sont, d'une part, formelles : ce sont les propriétés des sous-matrices qui ont des « symétries » (au sens mathématique) qui proviennent des propriétés de « symétrie » (au sens géométrique) des machines. Mais s'y ajoutent des propriétés dues à des hypothèses physiques (linéarité) ou géomètrico-physiques (premier harmonique). Toutes ces propriétés interviennent dans les modèles auxquelles nous sommes parvenus dans la section 3.5.

Ces propriétés sont toujours mises à contribution dans les méthodes modernes de commande des machines, que ce soient les « contrôles vectoriels » ou les « commandes directes du couple », qui toutes exploitent très intelligemment les propriétés de ces machines, c'est-à-dire les propriétés de leurs modèles telles que nous venons de les établir.

Les lecteurs doivent avoir à l'esprit ces propriétés lorsqu'ils s'intéressent à des machines qui ne sont pas classiques, ou qui ont des fonctionnements qui ne sont pas classiques.

Ainsi, de plus en plus, on travaille sur des machines qui ne sont pas triphasées (machines polyphasées ou machines défectueuses), ou sur des machines en régime saturé (non linéaires), ou encore sur des machines qui ont des distributions des champs qui ne sont pas sinusoïdales (hypothèse du premier harmonique non vérifiée). Il faut alors définir des modèles qui ne sont pas classiques et qui sont spécifiques des problèmes rencontrés. Les méthodes de contrôle modernes ont montré des qualités exceptionnelles et les « extensions des modèles » utilisées pour les cas non classiques cherchent à retrouver les « bonnes propriétés » des modèles classiques. C'est pourquoi il faut bien connaître ces modèles, et également bien assimiler les hypothèses qui les sous-tendent.

### 3.7. Bibliographie

[ADK 57] ADKINS B., *The general Theory of electrical Machines*, Chapman and Hall, Londres, 1957.

[ADK 75] ADKINS B., HARTLEY R.G., *The general theory of alternating current machines*, Chapman and Hall, Londres, 1975.

[BER 86] BERTIN M., FAROUX J.-P., RENAULT J., *Electromagnétisme 3 et 4*, 2 tomes, Dunod, Paris, 1986.

[BON 01] BONAL J., *Utilisation industrielle des moteurs à courant alternatif*, Technique et documentation, Lavoisier, Paris, 2001.

[CHA 83] CHATELAIN J., *Machines électriques*, Traité d'électricité, vol. 10, Dunod, Paris, 1983.

[CON 51] CONCORDIA C., *Synchronous Machines*, Wiley and Son, New York, 1951.

[COU 84] DE COULON F., JUFER M., *Introduction à l'électrotechnique*, Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique, Dunod, Paris, 1984.

[FEY 79] FEYNMAN R., LEIGHTON R., SANDS M., *Electromagnétisme*, Cours de physique de Feynman, 2 tomes, Interéditions, Paris, 1979.

[GAU 95] GAUDE D., « La Conversion d'Energie Electromécanique », *Bulletin de l'Union des Physiqciens*, vol. 89, p. 165-204, juin 1995.

[GRE 01] GRENIER D., LABRIQUE F., BUYSE H., MATAGNE E., *Electromécanique, Convertisseurs d'énergie et actionneurs*, Dunod, Paris, 2001.

[IVA 94] IVANES M., PERRET R., *Eléments de génie électrique*, Hermès, Paris, 1994.

[JON 67] JONES C.V., *The unified theory of electrical machines*, Butterworth, Londres, 1967.

[JUF 79] JUFER M., *Electromécanique*, Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique, Dunod, Paris, 1979.

[JUF 83] JUFER M., *Transducteurs électromécaniques*, Traité d'Electricité vol. 9, EPFL, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1983.

[KU 52] KU Y.H., « Rotatting-field theory and general analysis of synchronous and induction machines », *IEE, Monogr.*, vol. 99, part IV, n° 4, p. 410-428, 1952.

[LAN 69] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Electrodynamique des Milieux continus*, Physique théorique, tome VIII, Editions Mir, Moscou, 1969.

[LEO 90] LEONHARD W., *Control of electrical machines*, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[LES 81] LESENNE J., NOTELET F., SÉGUIER G., *Introduction à l'électrotechnique approfondie*, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1981.

[LEV 84] LEVI E., *Polyphase Motors. A direct approach to their design*, Wiley and Son, New York, 1984.

[LYO 54] LYON W.V., *Transient analysis of alternating-current machinery*, Wiley and Son, New York, 1954.

[MIL 89] MILLER T.J.E., *Brushless permanent magnet and reluctance motor drives*, Oxford science publications, Clarendon, 1989.

[PAR 29] PARK R.H., « Two-reaction theory of synchronous machines », *AIEE Trans.* 48, p. 716-730, 1929.

[PAR 33] PARK R.H., « Two-reaction theory of synchronous machines », *AIEE Trans.* 52, p. 352-355, 1933.

[RIU 00] RIU D., RETIÈRE N., « Modélisation des machines électriques par des systèmes d'ordre un demi », *Revue Internationale de Génie Electrique*, vol. 3, n° 4, p. 467-495, 2000.

[WHI 59] WHITE D.C., WOODSON H.H., *Electromechanical Energy Conversion*, Wiley and Son, New York, 1959.

[WIL 00] WILDI T., SYBILLE G., *Electrotechnique*, De Boeck Université, Bruxelles, 2000.

Chapitre 4

# Propriétés vectorielles des systèmes électriques triphasés

## 4.1. Problématique et hypothèses

### 4.1.1. *Une présentation générale des transformations*

La modélisation des systèmes électriques triphasés en vue de leur commande a pour but ultime de permettre la détermination des commandes, c'est-à-dire l'écriture d'algorithmes qui servent à calculer les « entrées » nécessaires pour imposer les « sorties ». Dans notre contexte, les entrées sont les signaux d'alimentation (tensions, courants) des systèmes électriques triphasés, et les sorties sont, par exemple, le couple, la vitesse ou les flux qui décrivent l'état magnétique des machines électriques.

Le modèle « direct » permet de calculer les sorties en fonction des entrées et le modèle « inverse » permet de calculer les entrées nécessaires pour imposer les sorties désirées (souvent, des références). Un bon « modèle de commande » est un modèle « direct » aisé à « inverser ».

Pour inverser le modèle direct, il faut que celui-ci ait une forme effectivement « inversible », c'est-à-dire, en pratique, une forme assez simple pour que l'on puisse la manipuler aisément. Les modèles physiques, c'est-à-dire la forme initiale des modèles directs des systèmes électriques, sont ordinairement des équations différentielles non linéaires d'ordre élevé. Ils sont donc complexes et la tradition de

---

Chapitre rédigé par Eric SEMAIL, Jean-Paul LOUIS et Gilles FELD.

l'électrotechnique a mis depuis longtemps au point des méthodes de modélisation pour simplifier ces modèles. Ces méthodes se basent sur des « transformations ». Celles-ci ont d'abord servi à étudier les transitoires dans les machines électriques [BAR 82, LES 81]. Plus récemment, il a fallu adapter ces transformations à la problématique plus particulière de la commande des machines électriques et l'étendre aux convertisseurs statiques qui alimentent ces machines. C'est dans cette optique que nous allons présenter ici ces transformations.

Nous allons chercher à donner à cet exposé un aspect synthétique. En effet, les électrotechniciens ont inventé différentes variantes pour « transformer » les équations des machines, et habituellement chaque auteur présente et exploite la variante qu'il a choisie. Nous ne voulons pas privilégier ici une de ces variantes afin de permettre aux lecteurs de lire, en la comprenant, la plupart des variantes qu'il peut rencontrer dans la littérature. Cela nous a poussé à développer une « présentation générale » qui n'a pas la prétention d'être une « théorie générale » qui recouvrirait toutes les transformations possibles (cela est-il possible ?), mais qui cherche à mettre en évidence les propriétés communes à toutes ces transformations, en s'appuyant sur les propriétés spécifiques aux machines à courants alternatifs triphasés, synchrone et asynchrone, et aux onduleurs de tension à deux niveaux. Ces propriétés nous semblent n'être qu'au nombre de deux : la première conduit à une transformation dite « triphasé-diphasé » qui montre que l'espace à trois dimensions des systèmes triphasés peut se décomposer en deux sous-espaces orthogonaux [SEM 00] : une droite vectorielle (la « direction homopolaire ») et un sous-espace de dimension 2 (le « plan diphasé »), dans lequel ont lieu les phénomènes utiles pour la conversion d'énergie. On y définit alors les « composantes symétriques ». Dans ce sous-espace diphasé intervient la deuxième propriété : des « rotations » permettent d'écrire simplement les phénomènes fondamentaux propres à la conversion d'énergie dans les machines tournantes triphasées. On définit alors les « composantes relatives ».

Nous nous sommes largement inspirés des méthodes formelles de Gudefin [GUD] qui cherchait des méthodes générales pour étudier la conversion d'énergie : les expressions « factorisées » ou « décomposées » des variables ou des opérateurs lui doivent beaucoup. Nous en proposons ici à la fois une systématisation et une extension à divers éléments, comme les convertisseurs statiques et les lois de commande [LOU 96, LOU 99]. Mais nous avons aussi cherché à être cohérents avec les exposés classiques d'auteurs français [BAR 82, CAR 95, LES 81], suisses [BUH 79, CHA 83], belges [GRE 01], allemands [DEP 98, LEO 90], anglo-saxons [ADK 57, CON 51, KU 52, LYO 54, NOV 00, VAS 92, WHI 59] et hongrois [KOV 59, LAZ 87] qui ont des méthodes et des conventions différentes. Cet œcuménisme a cependant des limites, sinon cet exposé aurait été déraisonnablement long : nous n'avons pas cherché à donner la forme la plus générale possible, car nous avons fait des choix méthodologiques, largement partagés par les auteurs de la communauté, mais pas par tous. Ainsi, nous avons systématiquement choisi pour les

référentiels dans le plan diphasé des vecteurs de base qui sont toujours orthogonaux et qui ont toujours la même norme : nos repères sont toujours directs ; les angles de rotation sont toujours comptés positivement dans le sens trigonométrique habituel (ce que ne font pas nombre d'auteurs anglo-saxons). Enfin, nous ne faisons pas référence à la théorie généralisée de Kron [GAU 95, HEL 01, KRO 35-38]), notre philosophie générale étant celle de Park [PAR 29]. Nous n'utilisons pas non plus les représentations réduites (*per unit*) qui permettent de comparer les performances de machines de puissances très différentes.

Nous verrons qu'il est possible d'utiliser deux grandes familles de transformations : les « transformations réelles » (Clarke, Concordia, Park) et les transformations complexes (Fortescue, Lyon, Ku, « phaseurs »). Chaque famille peut générer diverses variantes suivant que les transformations sont « normées » (et représentées par des matrices « orthogonales » ou « unitaires ») ou « non normées », et il y a une infinité de façons de « ne pas normer une matrice ». Quoique nous nous limiterons à présenter les transformations les plus fréquemment utilisées, celles-ci restent suffisamment variées pour que cette situation légitime notre présentation générale, de façon à bien mettre en évidence les propriétés invariantes des systèmes électriques, propriétés qui ne dépendent pas de la transformation choisie. Cette présentation générale a aussi pour but de prouver que toutes ces transformations sont équivalentes, et nous donnerons les équations qui permettent de passer de l'une à l'autre, de façon à montrer que le choix d'une transformation est simplement lié à des convenances personnelles propres au modélisateur.

Cet exposé est structuré de la façon suivante. Après avoir défini les hypothèses (section 4.1) et présenté des exemples fondamentaux (section 4.2), nous justifierons, grâce à une analyse mathématique des objets mathématiques (des matrices) rencontrés dans les exemples, les principales transformées utilisées en électrotechnique (section 4.3). Nous appliquerons ensuite les concepts à une machine asynchrone et à une machine synchrone à pôles saillants munie d'amortisseurs (section 4.4). Puis, nous examinerons la problématique des changements de repères liée essentiellement à la présence de pièces mécaniques en mouvement (section 4.5). Enfin, nous consacrerons les sections 4.6 et 4.7 à une présentation unifiée des transformations, qu'elles soient basées sur des transformations sur les réels ou sur des complexes, avec des matrices de transformations normées ou non normées.

### 4.1.2. *Les hypothèses physiques*

#### 4.1.2.1. *Les hypothèses classiques*

Les transformations classiques exigent un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Nous allons énoncer les plus importantes. Pour les machines électriques, les hypothèses classiques sont les suivantes :

– linéarité : pas de saturation des circuits magnétiques ;

– symétrie : les enroulements d'une armature triphasée sont identiques ; ils sont simplement décalés dans l'espace de $2\pi/3$ ;

– hypothèse du premier harmonique : la distribution des champs dans l'entrefer est sinusoïdale ;

– on néglige tous les phénomènes considérés comme secondaires : variation de l'entrefer à cause des effets d'encoches, pertes ferromagnétiques (effet de l'hystérésis, des courants de Foucault), effet de peau, etc. Les phénomènes thermiques sont supposés avoir des effets très lents ; donc à un instant donné les résistances sont considérées comme des paramètres constants.

Pour l'onduleur de tension à deux niveaux, l'onduleur est parfait ; en particulier, nous négligeons les chutes de tension dues aux interrupteurs ; les durées des temps morts sont très brèves et leurs effets sont supposés négligeables.

Des extensions sont possibles : aux systèmes polyphasés, aux machines en régime saturé, aux machines à distributions non sinusoïdales. Ces extensions sortent du cadre de cet exposé.

4.1.2.2. *Les équations très générales*

Les systèmes électriques triphasés peuvent être décrits, en première approche, par un petit nombre d'équations très générales. Nous allons les énoncer, en adoptant les notations suivantes : les vecteurs sont notés en général : $(x_{in})$, où $n$ désigne l'ordre du système (le plus souvent cet ordre sera 3 pour les systèmes polyphasés, ou 2 pour les systèmes diphasés, ou 1 pour les systèmes monophasés). L'indice $i$ indique l'armature (par exemple, $s$ pour le stator, $r$ pour le rotor). Les vecteurs décriront habituellement des tensions, notées $(v)$, ou des courants, notés $(i)$ ou des flux, notés $(\psi)$.

Les propriétés magnétiques sont décrites par les équations relatives aux flux :

$$(\psi_{an}) = L_{an,bm}(\theta).(i_{bm}) \qquad [4.1]$$

où $L_{an,bm}(\theta)$est une matrice (de dimensions $n \times m$) dont les éléments sont des inductances propres ou mutuelles. Ces matrices peuvent dépendre de la position du rotor, notée $\theta$.

Les propriétés électriques sont décrites par les équations des tensions déduites de la loi d'Ohm et de la loi de Faraday, que l'on écrit dans le repère propre de l'enroulement (ou « référentiel naturel ») ; une forme générale de ce type d'équation est :

$$(v_{an}) = R_a.(i_{an}) + \frac{d(\psi_{an})}{dt} = R_a.(i_{aa}) + \frac{d\left(L_{an,bm}(\theta).(i_{bm})\right)}{dt} \qquad [4.2]$$

Les circuits magnétiques dans une machine dépendent de la position du rotor. La conversion d'énergie électromécanique est donnée par les expressions de la co-énergie magnétique $W_{cm}$ et du couple électromagnétique $C_{em}$ qui sont de la forme :

$$\begin{aligned} W_{cm} &= \frac{1}{2}.(i_{an})^t.L_{an,bm}(\theta).(i_{bm}) \\ C_{em} &= \left.\frac{\partial W_{cm}}{\partial \theta}\right|_{(i_{na}),(i_{mb})=\text{constantes}} \end{aligned} \qquad [4.3]$$

Il faut aussi un modèle du convertisseur statique, l'onduleur triphasé qui « module » la tension d'entrée pour générer la tension de sortie ; il sera décrit par une matrice de gain $G$ :

$$(v_{s3}) = G.(v_{e3}) \qquad [4.4]$$

où l'indice $e$ dénote la tension d'entrée de l'onduleur et l'indice $s$ la tension de sortie.

## 4.2. Les exemples fondamentaux et leurs modèles

Nous allons présenter quelques exemples que nous considérons comme représentatifs. Nous énonçons la *propriété* suivante : si nous savons traiter ces exemples, nous saurons traiter complètement les modèles des systèmes triphasés : les machines synchrones et asynchrones, et les onduleurs de tension qui les alimentent. Ces exemples sont en nombre limité et sont énumérés dans les paragraphes suivants : les variables triphasées en régime sinusoïdal (paragraphe 4.2.2), des opérateurs matriciels « carrés » classiques (paragraphe 4.2.3), des opérateurs matriciels moins classiques (paragraphe 4.2.4), des équations différentielles (paragraphe 4.2.5).

### 4.2.1. *Notations des systèmes triphasés et diphasés : écriture vectorielle, écriture matricielle*

Les propriétés fondamentales des systèmes électriques triphasés sont « vectorielles », mais souvent écrites dans un « formalisme matriciel ». Lorsqu'une propriété est générale, on l'écrira avec un formalisme vectoriel, comme $\vec{x}$. Des indices peuvent particulariser ce vecteur $\vec{x}_3$ s'il appartient à tout l'espace de

dimension 3, et $\vec{x}_2$ s'il appartient à un plan, qualifié de « diphasé ». Lorsque l'on écrit un vecteur dans un référentiel particulier, on l'écrira avec le formalisme matriciel $(x)$. Nous verrons qu'il existe différents repères classiques pour écrire ces vecteurs, et nous avons cherché à définir des conventions permettant de les distinguer. Les composantes triphasées dans leur référentiel naturel[1] sont notées ainsi (l'écriture en ligne transposée est une facilité typographique) :

$$(x_3) = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \end{bmatrix}^t \qquad [4.5]$$

Pour les vecteurs, dont les composantes sont diphasées, la notation générale est $(x_2)$. Elle comporte deux variantes principales, l'une est réelle (indices $\alpha$ et $\beta$), et l'autre est complexe (indices + et –) ; quand nous ne voulons pas particulariser (essai d'écriture unifiée), nous les notons : $x_{21}$ et $x_{22}$.

| Notation générale | Variante réelle | | Variante complexe | |
|---|---|---|---|---|
| $(x_2) = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = (x_{\alpha\beta})$ | [4.6] | $\begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = (x_{+-})$ | [4.7] |

**Tableau 4.1.** *Les variantes des composantes diphasées*

### 4.2.2. *Exemple 0 – Une variable privilégiée : le système sinusoïdal, triphasé, équilibré, direct*

Le classique système triphasé équilibré direct joue un rôle très important pour les systèmes étudiés. Une forme générale est définie par l'amplitude maximale $X_m$ (nous utiliserons aussi l'amplitude efficace $X$, qui vérifie : $X_m = \sqrt{2}.X$ ) et la phase $\xi$ :

$$(x_3) = X_m . \begin{bmatrix} \cos(\xi) \\ \cos(\xi - 2.\frac{\pi}{3}) \\ \cos(\xi - 4.\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \equiv X_m . \begin{bmatrix} \cos(\xi) \\ \cos(\xi - 2.\frac{\pi}{3}) \\ \cos(\xi + 2.\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad [4.8]$$

1. Dans le « référentiel naturel », les coordonnées sont les grandeurs mesurables des phases $(a, b, c)$.

### 4.2.3. *Les trois exemples fondamentaux décrits par des opérateurs matriciels carrés*

Nous allons présenter en premier lieu trois opérateurs décrits par des matrices carrées. Nous verrons alors que les transformations classiques permettent de diagonaliser ces opérateurs. Ainsi, nous nous intéresserons, lors de la présentation des trois exemples, aux valeurs propres des matrices carrées étudiées. Les matrices carrées présentes dans les exemples sont soit symétriques[2], soit circulantes[3]. Or, si une matrice $M_3$ est symétrique (respectivement circulante), alors elle est diagonalisable sur les réels (resp. sur les complexes).

#### 4.2.3.1. *Exemple 1 – Flux propre créé par une armature dans une machine à pôles lisses (stockage d'énergie électromagnétique) : matrice $L_p$*

Cet exemple concerne aussi bien le stator d'une machine synchrone à pôles lisses que le stator ou le rotor d'une machine asynchrone :

$$(\psi_3) = L_p.(i_3) \qquad [4.9]$$

avec :

$$(\psi_3) = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix},\ (i_3) = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix},\ L_p = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \qquad [4.10]$$

La matrice $L_p$ est symétrique et circulante. Elle a une valeur propre simple : $L_h = L + 2.M$, appelée « inductance (cyclique) homopolaire » (on omet généralement l'adjectif « cyclique » ici), et une valeur propre double, « l'inductance cyclique » : $L_c = L - M$.

#### 4.2.3.2. *Exemple 2 – Gain d'un onduleur (modulation de l'énergie électrique) : matrice G*

Il s'agit du modèle relatif à un onduleur de tension triphasé à deux niveaux alimentant une charge équilibrée couplée en triangle ou en étoile sans neutre sorti :

2. Une matrice est $M_s$ est symétrique si $M_s^t = M_s$. La symétrie est due en général à l'unicité de la mutuelle entre deux phases : $M_{ij} = M_{ji}$.

3. Une matrice $M$ est circulante si une colonne (ou une ligne) se déduit de la précédente par permutation circulaire. Cette circularité est due en général à la régularité constructive des machines tournantes. Ce n'est pas rigoureusement le cas de certains transformateurs et de moteurs linéaires.

$$(v_{s3}) = G.(v_{e3}) \qquad [4.11]$$

avec :

$$G = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \ (v_{s3}) = \begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix}, \ (v_{e3}) = \begin{bmatrix} v_{ea} \\ v_{eb} \\ v_{ec} \end{bmatrix} \qquad [4.12]$$

La matrice $G$ est aussi symétrique et circulante : elle a une valeur propre simple nulle $\lambda_0 = 0$, et une valeur propre double $\lambda_1 = 1$.

4.2.3.3. *Exemple 3 – Flux mutuel (avec conversion d'énergie) : matrice $M_{sr}(\theta)$*

Il s'agit du modèle du flux mutuel, noté $(\psi_{s3}) = [\psi_{sa} \quad \psi_{sb} \quad \psi_{sc}]^t$ créé par les courants, notés $(i_{r3}) = [i_{ra} \quad i_{rb} \quad i_{rc}]^t$, d'un rotor triphasé de machine asynchrone, dans les enroulements du stator, également triphasé :

$$(\psi_{s3}) = M_{sr}(\theta).(i_{r3}) \qquad [4.13]$$

avec :

$$M_{sr}(\theta) = M_0.\begin{bmatrix} \cos(p.\theta) & \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) \\ \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta) & \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) \\ \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta) \end{bmatrix} \qquad [4.14]$$

Cette matrice est circulante, non symétrique. Elle a une valeur propre nulle : $\lambda_0 = 0$, et deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} M_0 e^{jp\theta}, \ \lambda_2 = \frac{3}{2} M_0 e^{-jp\theta}$$

### 4.2.4. *Les trois exemples complémentaires, venus de la modélisation de la machine synchrone*

D'autres opérateurs ont des formes moins classiques, et certains d'entre eux sont décrits par des matrices qui sont rectangulaires. Les exemples 4 à 6 sont propres à la modélisation de la machine synchrone.

#### 4.2.4.1. *Exemple 4 – Excitation d'une machine synchrone : matrice $M_{sf}(\theta)$*

Nous considérons le modèle du flux mutuel créé par l'excitation monophasée dans les enroulements triphasés du stator d'une machine synchrone :

$$\left(\psi_{s3f}\right)=M_{sf}(\theta).i_f\text{, avec }\left(\psi_{s3f}\right)=\left[\psi_{saf}\quad\psi_{sbf}\quad\psi_{scf}\right]^t \qquad [4.15]$$

avec :

$$M_{sf}(\theta)=M_0.\begin{bmatrix}\cos(p\theta)\\ \cos(p\theta-2\pi/3)\\ \cos(p\theta+2\pi/3)\end{bmatrix} \qquad [4.16]$$

#### 4.2.4.2. *Exemple 5 – Flux propre créé par le stator d'une machine synchrone à pôles saillants : matrice $L_{ss}(\theta)$*

$$\left(\psi_{s3}\right)=L_{ss}(\theta).\left(i_{s3}\right)\text{ avec }L_{ss}(\theta)=L_{ss0}+L_{ss2}(\theta) \qquad [4.17]$$

où :

$$\left(\psi_{s3}\right)=\begin{bmatrix}\psi_{sa}\\ \psi_{sb}\\ \psi_{sc}\end{bmatrix},\ \left(i_{s3}\right)=\begin{bmatrix}i_{sa}\\ i_{sb}\\ i_{sc}\end{bmatrix},L_{ss0}=\begin{pmatrix}L_{s0}&M_{s0}&M_{s0}\\ M_{s0}&L_{s0}&M_{s0}\\ M_{s0}&M_{s0}&L_{s0}\end{pmatrix}$$

et :

$$L_{s2}(\theta)=L_{s2}.\begin{bmatrix}\cos(2.p\theta)&\cos\left(2.p\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)&\cos\left(2.p\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \cos\left(2.p\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)&\cos\left(2.p\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)&\cos(2.p\theta)\\ \cos\left(2.p\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)&\cos(2.p\theta)&\cos\left(2.p\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)\end{bmatrix} \qquad [4.18]$$

La partie constante $L_{ss0}$ est identique à l'exemple 1 (matrice $L_p$, voir formule [4.10]) c'est donc aussi une matrice circulante et symétrique. C'est la partie variable, $L_{ss2}$, symétrique non circulante, qui est le terme intéressant. Les valeurs propres sont réelles. L'une est l'inductance homopolaire $L_{h0} = L_0 + 2M_0$, les autres vérifient :

$$L_{sd} = L_{sc0} + \frac{3}{2}L_{s2} \ ; \ L_{sq} = L_{sc0} - \frac{3}{2}L_{s2}$$

avec :

$$L_{sc0} = L_0 - M_0$$

4.2.4.3. *Exemple 6 – Flux mutuel créé par l'amortisseur diphasé (courants $i_D$ et $i_Q$) d'une machine synchrone dans les enroulements triphasés du stator : matrice $M_{sDQ}(\theta)$*

$$\left(\psi_{s3DQ}\right) = M_{sDQ}(\theta).\left(i_{DQ}\right) \text{ avec } \left(i_{DQ}\right) = \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \qquad [4.19]$$

$$M_{sDQ}(\theta) = \begin{bmatrix} M_{aD}.\cos(p\theta) & -M_{aQ}.\sin(p\theta) \\ M_{aD}.\cos(p\theta - 2.\frac{\pi}{3}) & -M_{aQ}.\sin(p\theta - 2.\frac{\pi}{3}) \\ M_{aD}.\cos(p\theta + 2.\frac{\pi}{3}) & -M_{aQ}.\sin(p\theta + 2.\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad [4.20]$$

### 4.2.5. *Equation différentielle : exemple 7*

Nous considérons un exemple typique d'équation différentielle, la loi aux mailles (avec les lois d'Ohm et de Faraday), écrite dans le référentiel propre d'un enroulement, également nommé « système de coordonnées naturelles » [LAZ 90] :

$$\left(v_3\right) = R.\left(i_3\right) + \frac{d\left(\psi_3\right)}{dt} \qquad [4.21]$$

REMARQUE.– Certains auteurs [SEM 00] précisent, par leurs notations, dans quel repère ils se placent pour écrire cette équation (le problème concerne surtout la dérivée du flux dans des enroulements qui peuvent être fixes ou mobiles). Par exemple, si l'on dérive le flux capté par un enroulement statorique dans un repère statorique noté $R_s$, on écrira :

$$\left(\frac{d\bar{\psi}_{3s}}{dt}\right)_{/R_s}$$

D'autres auteurs indiquent le repère où ils se placent par un indice supérieur. Par exemple, pour le flux d'un enroulement statorique dans le repère de l'enroulement rotorique (d'après [BUH 79]) :

$$\left(\frac{d(\psi_{3s}{}^{r})}{dt}\right)$$

#### 4.2.6. *Des bases de travail « conviviales »*

Pour l'étude des systèmes triphasés, il est d'usage de regrouper les trois composantes d'une même grandeur (le courant $i$ par exemple) sous forme d'un vecteur-colonne et de présenter, dans un souci de compacité, les équations du système étudié à l'aide de matrices. Par ce fait, on associe implicitement à toute grandeur un vecteur (par exemple $[i_a \ i_b \ i_c]^t$) d'un espace vectoriel de dimension 3. Cet espace est muni d'une base, qualifiée de « naturelle » [LAZ 90], dans laquelle les coordonnées du vecteur ne sont autres que les trois valeurs mesurables temporelles de la grandeur considérée (par exemple $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$). C'est dans cette base « naturelle » que s'expriment les équations qui régissent les phénomènes physiques du système étudié. Malheureusement, dans cette base de travail, les équations ne sont pas simples. Heureusement, l'étude mathématique des équations nous montre qu'il est possible de trouver d'autres bases au sein desquelles les équations se simplifient, ceci au prix de l'introduction de coordonnées fictives pour les grandeurs étudiées.

Nous qualifierons de « conviviale » une base commune, où *plusieurs* expressions physiques qui apparaissent de façon couplée et complexes dans les équations peuvent s'écrire de « façon simple ».

Ce que l'on appelle classiquement en électrotechnique « transformation » n'est autre que la formule mathématique qui permet de passer du système des coordonnées naturelles à un système de coordonnées « fictives » où les équations sont plus simples. Il est à noter qu'il existe plusieurs bases de travail qui vérifient ces propriétés. Il s'ensuit une multiplicité de transformations possibles. Nous verrons ainsi quels choix ont été opérés par Clarke, Concordia, Park, Fortescue, Lyon, Ku… en étudiant les différents exemples décrits dans la section 4.2.

Ces nouvelles bases sont en fait étroitement liées aux propriétés des matrices qui ont été introduites pour obtenir une formulation plus compacte. Au sens des espaces

vectoriels, une matrice est un tableau de valeurs donnant les coordonnées d'une application linéaire, application linéaire dont les propriétés sont indépendantes du choix d'une base. C'est l'étude de cette application qui permet de trouver les nouvelles bases de travail au sein de laquelle la matrice de l'application est plus simple. Il faut donc analyser la ou les matrices qui interviennent dans le système d'équations.

L'examen des exemples proposés met en évidence deux types de matrices :

– des matrices carrées,

– des matrices rectangulaires.

Nous allons chercher dans ces deux cas les bases de travail « conviviales ».

## 4.3. Genèse des bases à partir de l'étude des matrices carrées

Les systèmes physiques étudiés possèdent certaines propriétés qui se traduisent dans les matrices les caractérisant. Une des propriétés que l'on rencontre fréquemment est l'interchangeabilité[4] des phases entre elles : aucune ne joue spatialement un rôle différent par rapport aux deux autres. Cette « symétrie » induit dans l'espace de dimension 3, associé au système, une direction vectorielle privilégiée (une droite vectorielle). Il peut sembler alors naturel de décomposer l'espace tridimensionnel en deux sous-espaces : la droite vectorielle, induite par l'interchangeabilité des phases, et un plan qui lui est orthogonal. L'orthogonalité, *a priori* choisie simplement pour permettre une décomposition aisée de tout vecteur en une somme de deux vecteurs, s'imposera à nous naturellement lors de l'étude des matrices ; en effet, les expressions des puissances, (exemple privilégié, car très important en électrotechnique), ne conservent des expressions raisonnablement simples que dans des bases orthogonales. C'est ce type de décomposition vectorielle qui est sous-jacente aux « transformations » triphasées usuelles rencontrées en électrotechnique (Clarke, Concordia, Park, Fortescue, Lyon, Ku), voir [BAR 82, CHA 83, GRE 01, LEO 90, LES 81]. L'approche vectorielle se prête à une généralisation aux systèmes à plus grand nombre de phases [SEM 00].

On note $m_3$ l'application linéaire caractérisée dans la base naturelle par la matrice $M_3$ de dimension $3 \times 3$. Pour un vecteur $(x_3)$ dont les coordonnées naturelles sont $x_a$, $x_b$ et $x_c$, on a :

$$m_3(x_3) = M_3 . \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \end{bmatrix}^t \qquad [4.22]$$

4. Il est à noter que ce n'est pas rigoureusement le cas de certains transformateurs (« coplanaire » à *n* colonnes) et de moteurs linéaires.

### 4.3.1. *Analyse des propriétés mathématiques*

Les matrices carrées présentes dans les exemples sont soit symétriques, soit circulantes et nous avons déjà énoncé leurs propriétés (paragraphe 4.2.3). Leurs propriétés impliquent qu'il existe une base de travail au sein de laquelle l'application linéaire $m_3$ est caractérisée par une matrice diagonale et pour laquelle, les coordonnées réelles (resp. complexes) $\begin{bmatrix} x_0 & x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}^t$ du vecteur $(x_3)$, vérifient :

$$m_3(x_3) = \begin{bmatrix} \lambda_0.x_0 & \lambda_1.x_{21} & \lambda_2.x_{22} \end{bmatrix}^t \qquad [4.23]$$

avec $\lambda_k$ valeur propre réelle (resp. complexe). Les termes $\lambda_0.x_0$, $\lambda_1.x_{21}$, $\lambda_2.x_{22}$ sont les coordonnées dans la nouvelle base de travail de $m_3(x_3)$, l'image par $m_3$ du vecteur $(x_3)$. On obtient ainsi une expression matricielle plus simple. Quant à la nouvelle base, elle est constituée de vecteurs propres dont les coordonnées dans la base naturelle sont réelles (resp. complexes). Les nouvelles coordonnées $x_0$, $x_{21}$, $x_{22-}$ du vecteur $(x_3)$ s'obtiennent simplement par une relation matricielle de « passage » :

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^t = Tr_3^{-1}.\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \end{pmatrix}^t$$

et :

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \end{pmatrix}^t = Tr_3.\begin{pmatrix} x_0 & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^t \qquad [4.24]$$

avec :

$$M_3 = Tr_3.diag\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.Tr_3^{-1} \qquad [4.25]$$

La colonne numérotée $k$ de cette matrice de « passage » $Tr$ définit les trois coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k$. Dans la suite, cette matrice sera décomposée en deux sous-matrices rectangulaires : $Tr_{31}$ qui comporte trois lignes et une colonne, et $Tr_{32}$ à trois lignes et deux colonnes : $Tr_3 = \begin{bmatrix} Tr_{31} & Tr_{32} \end{bmatrix}$.

#### 4.3.1.1. *Symétrie seule*

Dans le cas d'une matrice symétrique (exemples 1, 2 et 5), on peut choisir une base *orthonormée*[5], alors $Tr_3^{-1} = Tr_3^t$ cela simplifie le calcul de $Tr_3^{-1}$. D'autre part,

5. Quand une base est orthonormée, on a la propriété $Tr_3^{-1} = Tr_3^t$. En mathématiques, la matrice est dite « orthogonale » si elle est réelle, ou « unitaire » si elle est complexe.

nous bénéficions d'une détermination aisée des coordonnées de tout vecteur dans cette nouvelle base en utilisant les propriétés du produit scalaire.

4.3.1.2. *Symétrie et circularité*

Dans le cas d'une matrice symétrique *et* circulante (exemples 1 et 2), les vecteurs propres d'une des valeurs propres (notons la $\lambda_0$) sont tous colinéaires à la somme des trois vecteurs unitaires de la base naturelle associés aux trois phases. On retrouve l'effet de l'interchangeabilité des phases, traduite mathématiquement par la circularité de la matrice. Par ailleurs, les deux autres valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont confondues, la valeur propre est alors dite « double ». Les vecteurs propres associés à cette valeur propre constituent un plan vectoriel et sont orthogonaux à tout vecteur propre associé à la valeur propre simple $\lambda_0$. On retrouve à ce niveau, si la condition de circularité est vérifiée, la décomposition de l'espace tridimensionnel en un plan et une droite orthogonaux. On préfère alors scinder le vecteur $\vec{x}_3$ en une somme de deux vecteurs $\vec{x}_0$ et $\vec{x}_2 : \vec{x}_3 = \vec{x}_0 + \vec{x}_2$. Le premier est associé à la valeur propre simple $\lambda_0$, l'autre à la valeur propre double $\lambda_1$. La composante liée à $\vec{x}_0$ est habituellement dite « homopolaire ». La particularité de l'existence d'un plan de vecteurs propres augmente considérablement la latitude de choix d'une base de travail conviviale. En effet, par une simple rotation dans le plan, on peut passer d'une base orthonormée à une nouvelle base orthonormée. Cette latitude est notamment utilisée pour trouver une base conviviale commune avec d'autres systèmes.

4.3.1.3. *Circularité seule, mais les coefficients sont réels*

Dans le cas d'une matrice circulante à coefficients *réels* (exemple 3), l'une des valeurs propres (notons la $\lambda_0$) est réelle, ainsi que le vecteur propre unitaire associé. Les deux autres valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont conjuguées ainsi que les vecteurs propres unitaires associés [BAS 95]. Il est alors possible de construire une base $B$ de vecteurs à coefficients réels dans laquelle l'expression matricielle de $m_3$ n'est certes pas diagonale, mais tout de même relativement simple (voir l'équation [4.26]). On y voit apparaître une matrice de rotation $P_3$. Donc, si l'on préfère travailler avec des grandeurs réelles et non complexes, on se contentera de cette simplification. C'est à ce niveau une question de choix qui mène soit vers l'utilisation des transformations complexes (Fortescue, Lyon et Ku) soit vers des transformations réelles (Clarke, Concordia et Park). En complexe, les calculs sont plus simples dans la mesure où l'opération « rotation d'angle $\theta$ » se résume à multiplier les vecteurs complexes du plan par $e^{j\theta}$. Néanmoins, lors de l'implantation sur calculateur, il faut revenir à des expressions à coefficients réels, ce qui explique que l'on puisse préférer directement travailler avec des rotations dans le plan réel. La matrice associée à $m_3$, s'appliquant à un vecteur dont les coordonnées sont dans la base $B$, a pour expression :

$$Mat(m_3, B) = P_3(Arg\lambda_1).\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_1| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_1| \end{bmatrix} \quad [4.26]$$

avec la matrice de rotation de rang 3 :

$$P_3(Arg\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(Arg\lambda_1) & -\sin(Arg\lambda_1) \\ 0 & \sin(Arg\lambda_1) & \cos(Arg\lambda_1) \end{bmatrix} \quad [4.27]$$

### 4.3.2. *Revue des transformations connues à la lumière des propriétés énoncées*

4.3.2.1. *Transformation par la matrice initiale de Clarke*

La matrice initiale de *Clarke* $C_3$ (voir l'équation [4.28]) est la matrice de passage $Tr_3$ obtenue dans le cas d'une matrice $M_3$ à coefficients réels, symétrique et circulante, lorsque l'on impose la conservation de l'amplitude $X_m$ entre un système équilibré de trois grandeurs sinusoïdales $x_a$, $x_b$, $x_c$ et un système équilibré de deux grandeurs sinusoïdales $x_\alpha$ et $x_\beta$ (voir l'équation [4.29]).

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = C_3.\begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \text{ avec } C_3 = \begin{bmatrix} C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad [4.28]$$

Les composantes $x_0$, $x_\alpha$ et $x_\beta$ sont dites « composantes symétriques au sens de Clarke ». La matrice de Clarke est présentée dans l'équation [4.28] avec sa décomposition en deux sous-matrices : $C_{31}$, qui est la 1re colonne de longueur[6] $l_1 = \sqrt{3}$, et $C_{32}$, qui regroupe les 2e et 3e colonnes dont les longueurs sont $l_2 = \sqrt{3/2}$. La matrice initiale de Clarke permet de factoriser les systèmes triphasés en conservant l'amplitude :

6. La « longueur d'une colonne » est la norme du vecteur défini par cette colonne.

$$\begin{bmatrix} X_m \cos(\xi) \\ X_m \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ X_m \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ X_m \cos(\xi) \\ X_m \sin(\xi) \end{bmatrix} \quad [4.29]$$

Cette transformation est pratique lorsque l'on travaille en ne s'intéressant qu'à une seule grandeur tension ou courant. C'est le cas par exemple dans l'étude de la commande d'onduleurs de tension ou de courant.

4.3.2.2. *Transformation par la matrice normée de Concordia*

La matrice de Concordia $T_3$ [4.30] est la matrice de passage $Tr_3$ obtenue dans le cas d'une matrice $M_3$ à coefficients réels, symétrique et circulante (exemples 1 et 2) *lorsque l'on impose aux vecteurs de la base de travail d'être de module unitaire.*

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = T_3 . \begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \text{ avec } T_3 = (T_{31} \;\; T_{32}) = \sqrt{\frac{2}{3}} . \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad [4.30]$$

Entre la matrice de Concordia et la matrice initiale de Clark existe une relation simple, que nous donnons sous forme décomposée :

$$T_3 = \begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} . C_{31} & \sqrt{\frac{2}{3}} . C_{32} \end{bmatrix} \quad [4.31]$$

$T_3$ est « orthogonale », donc $T_3^{-1} = T_3^t$. Les composantes $x_0$, $x_\alpha$ et $x_\beta$ sont dites « composantes symétriques au sens de Concordia ». L'intérêt principal de cette transformation est de conserver la puissance :

$$v_a . i_a + v_b . i_b + v_c . i_c = (v_3)^t . (i_3) = v_0 . i_0 + v_\alpha . i_\alpha + v_\beta . i_\beta \quad [4.32]$$

Par ailleurs, comme dans le paragraphe 4.3.1.3, $T_3$ est la matrice de passage qui permet d'obtenir une formulation simplifiée [4.26]. On a en effet :

$$M_3 = T_3.P_3(Arg\lambda_1).\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_1| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_1| \end{bmatrix}.T_3^{-1} \qquad [4.33]$$

On voit donc que cette matrice $T_3$ pourra être avantageusement utilisée dans les systèmes qui regroupent les exemples 1 (matrice $L_p$) et 3 (matrice $M_{sr}$) telles les machines électriques à pôles lisses.

4.3.2.3. *Transformation par la matrice classique de Fortescue*

La matrice classique de Fortescue $F_3$ [4.36] est la matrice de passage obtenue dans le cas d'une matrice $M_s$ circulante lorsque l'on impose, lors du changement de base, la conservation du module du vecteur $(x)$[7] :

$$\sqrt{x_a{}^2 + x_b{}^2 + x_c{}^2} = \sqrt{|x_0|^2 + |x_+|^2 + |x_-|^2} \qquad [4.34]$$

Les transformées de Fortescue sont définies par :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = F_3.\begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = F_3^{-1}.\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \qquad [4.35]$$

avec :

$$F_3 = (F_{31}, F_{32}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \text{ et } F_3^{-1} = \frac{1}{3}.F_3^{t*} \qquad [4.36]$$

où $a$ est une racine cubique de l'unité : $a = -\frac{1}{2} + j.\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $a^3 = 1$.

4.3.2.4. *Note sur la transformée classique de Fortescue*

$F_3$ est historiquement connue pour l'étude des régimes déséquilibrés (« composantes symétriques ») en régime sinusoïdal [4.37]. Alors, le vecteur initial n'est *pas* constitué des grandeurs temporelles mesurables, mais de grandeurs *complexes* caractérisées par leur phase et leur valeur efficace. Les nouvelles coordonnées des

---

7. On rappelle que pour un vecteur à coordonnées complexes on a adopté la notation suivante : $(x) = (x_0\, x_+ x_-)^t = (x_0\, (x_{+-}))^t$.

vecteurs sont alors appelées directe $\underline{X_d}$, inverse $\underline{X_i}$ et homopolaire $\underline{X_0}$. Dans ce cas, la matrice des impédances, à coefficients complexes et circulante, est aussi diagonalisée (voir la formule [4.38]) à l'aide de la matrice de Fortescue :

$$\begin{bmatrix} \underline{X_a} \\ \underline{X_b} \\ \underline{X_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\underline{X_a}|\exp(jArg\underline{X_a}) \\ |\underline{X_b}|\exp(jArg\underline{X_b}) \\ |\underline{X_c}|\exp(jArg\underline{X_c}) \end{bmatrix} = F_3 \begin{bmatrix} \underline{X_0} \\ \underline{X_d} \\ \underline{X_i} \end{bmatrix} \quad [4.37]$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_3 & Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_3 & Z_1 \end{bmatrix} = F_3 . \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_d & 0 \\ 0 & 0 & Z_i \end{bmatrix} . F_3^{-1} \quad [4.38]$$

Dans le cas d'une grandeur sinusoïdale « directe », seule existe la composante directe dont l'amplitude $X_m$ se conserve :

$$\begin{bmatrix} X_m e^{j\xi} \\ X_m e^{j\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ X_m e^{j\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right)} \end{bmatrix} = F_3 \begin{bmatrix} 0 \\ X_m e^{j\xi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.39]$$

Il y a donc certes mathématiquement des points communs avec l'objet de ce chapitre, mais on se limite alors aux régimes permanents sinusoïdaux en représentation complexe. Dans le cadre qui est le nôtre, les composantes $x_0$, $x_+$ et $x_-$ sont dites « composantes symétriques au sens de Fortescue », et elles sont appliquées aux variables temporelles mesurables.

#### 4.3.2.5. *Transformation par la matrice normée de Lyon*

La matrice normée de Lyon $L_3$, définie par la formule [4.41], est la matrice de passage obtenue dans le cas d'une matrice $M_s$ circulante lorsque l'on impose aux vecteurs de la base de travail d'être de module unitaire. La transformation de Lyon s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \end{bmatrix}^t = L_3 . \begin{bmatrix} x_0 & x_+ & x_- \end{bmatrix}^t \quad [4.40]$$

Les composantes $x_0$, $x_+$ et $x_-$ sont dites « composantes symétriques au sens de Lyon ». Entre les matrices normées de Lyon et de Fortescue existe la relation :

$$L_3 = [L_{31} \;\; L_{32}] = \frac{1}{\sqrt{3}}[F_{31} \;\; F_{32}] \qquad [4.41]$$

La matrice $L_3$ est « unitaire » aussi : $L_3^{-1} = L_3^{t*}$. L'intérêt principal de cette transformation est de conserver la puissance, que l'on écrit sous forme d'un produit scalaire hermitien[8] :

$$v_a.i_a + v_b.i_b + v_c.i_c = (i)^{t*}.(v) = v_0.i_0^* + v_+.i_+^* + v_-.i_-^* \qquad [4.42]$$

4.3.2.6. *Transformation par les matrices de Park*

Les matrices de Park d'angle $\xi$ occupent une place particulière à cause de leur caractère relativement universel. Dans le cas de l'exemple 5 (matrice $L_{ss}$), la matrice de passage vers une base plus conviviale de vecteurs propres est une matrice de Park. Mais de plus, ce type de matrice peut aussi être considéré comme matrice de passage pour les exemples 1 et 2 ($L_p$ et $G$). Cela tient au fait qu'une matrice de Park est le produit de deux matrices d'ordre 3 : une matrice de rotation $P_3(\xi)$ (voir l'équation [4.27]), caractéristique d'une rotation d'angle $\xi$ dans un plan, soit par la matrice de Clarke, ce qui définit $Q_{3C}(\xi)$ (voir équation [4.43]), soit par la matrice de Concordia, ce qui définit $Q_{3T}(\xi)$ (voir formule [4.44]). Or, dans les exemples 1 et 2 (soit pour $L_p$ et $G$), un plan vectoriel caractéristique (associé à une valeur propre double) a été mis en évidence. Il est dans ce cas facile d'obtenir une nouvelle base conviviale par simple rotation dans ce plan : c'est ce qui est réalisé par les matrices de rotation de Park. On obtient dans ces deux exemples une première base conviviale, soit par la matrice de Concordia, soit par la matrice de Clarke. Les composantes des vecteurs dans ces nouvelles bases sont dites « composantes symétriques ».

Ensuite, on crée une autre base conviviale par une rotation d'angle $\xi$, $P_3(\xi)$. Les composantes des vecteurs dans ces nouvelles bases sont dites « composantes relatives ». Pour l'exemple 3 (matrice $M_{sr}$) enfin, là encore une matrice de Park apparaît naturellement (voir le paragraphe 4.3.1.3 et l'équation [4.46]). Les deux matrices de Park définies précédemment (matrice « initiale » $Q_{3I}$ avec Clarke, et « normée » $Q_{3T}$ avec Concordia ont pour expression :

8. Le produit scalaire hermitien entre deux vecteurs à coefficients complexes $(v)$ et $(i)$ de coordonnées $(v_0, v_+, v_-)$ et $(i_0, i_+, i_-)$ fait effectivement intervenir les grandeurs conjuguées de l'un des vecteurs. Dans notre cas, ce sont celles de $(i)$ : $i_0^*$, $i_+^*$ et $i_-^*$.

$$Q_{3C}(\xi) = C_3.P_3(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \cos\xi & -\sin\xi \\ 1 & \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1 & \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad [4.43]$$

$$Q_{3T}(\xi) = T_3.P_3(\xi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\xi & -\sin\xi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad [4.44]$$

Les transformées de Park sont définies par la relation :

$$\begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \end{bmatrix}^t = Q_3(\xi).\begin{bmatrix} x_0 & x_d & x_q \end{bmatrix}^t \quad [4.45]$$

Les composantes $x_0$, $x_d$ et $x_q$ sont dites « composantes relatives au sens de Park ». Dans le plan diphasé obtenu après rotation, l'axe de la composante $d$ est dit : « axe direct », et l'axe de la composante $q$ est dit : « axe en quadrature ». On parle alors des « transformées des deux axes ».

PROPRIÉTÉ.– On peut factoriser la matrice $M_{sr}$ à partir de la formule [4.33] :

$$M_{sr} = Q_{3T}(Arg\lambda_1).\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_1| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_1| \end{bmatrix}.T_3^{-1} \quad [4.46]$$

On peut définir directement les composantes relatives au sens de Park :

$$(x_3) = Q_3(\xi).\begin{bmatrix} x_0 & x_d & x_q \end{bmatrix}^t \text{ et } \begin{bmatrix} x_0 & x_d & x_q \end{bmatrix}^t = Q_3(\xi)^{-1}.(x_3) \quad [4.47]$$

Le paragraphe 4.9.1 donne un moyen général pour calculer les matrices inverses des matrices de Park (formules [4.158], [4.161] et [4.162]).

4.3.2.7. *Transformation par les matrices complexes de Ku*

Les matrices de Ku d'angle $\xi$, $K_3(\xi)$ [4.48] sont le pendant des matrices de Park lorsque l'on travaille avec les complexes. On les obtient par produit d'une matrice de Fortescue ou de Lyon par la matrice « rotation » $R_3(\xi)$ :

$$R_3(\xi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{+j\xi} & 0\\ 0 & 0 & e^{-j\xi}\end{bmatrix}, \text{ et } K_3(\xi)=k.\begin{bmatrix}1 & e^{j\xi} & e^{-j\xi}\\ 1 & a^2e^{j\xi} & ae^{-j}\\ 1 & ae^{j\xi} & a^2e^{-j\xi}\end{bmatrix} \quad [4.48]$$

avec $k=1$ avec Fortescue (matrice non normée) et $k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ avec Lyon (normée). On peut alors définir directement les composantes relatives au sens de Ku :

$$\left(x_3\right)=K(\xi).\left[x_0 \quad x_f \quad x_b\right]^t \text{ et } \left[x_0 \quad x_f \quad x_b\right]^t=K(\xi)^{-1}.\left(x_3\right) \quad [4.49]$$

Le paragraphe 4.9.1 donne un moyen général pour calculer les matrices inverses des matrices de Ku (formules [4.158], [4.163] et [4.164]). Les grandeurs indicés $f$ sont dites *forward*, et celles indicées $b$ sont dites *backward*.

## 4.4. Genèse des bases à partir de matrices rectangulaires

Dans les exemples 4 (matrice $M_{sf}$) et 6 (matrice $M_{sDQ}$) apparaissent des matrices rectangulaires. Celles-ci caractérisent elles aussi une application linéaire, mais contrairement aux matrices carrées, l'espace de départ et l'espace d'arrivée ne peuvent être confondus puisque de dimensions différentes. Dans l'exemple 4, l'espace de départ est de dimension 1 (droite vectorielle), dans l'exemple 6 de dimension 2 (plan vectoriel). On ne peut plus alors utiliser les notions de vecteurs propres et de valeurs propres. Il faut se contenter de propriétés caractéristiques plus générales des applications linéaires à savoir :

– le noyau, sous-espace vectoriel de l'espace de départ. C'est l'ensemble des vecteurs dont l'image par l'application vaut le vecteur nul ;

– l'image, sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée. C'est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs images (créés par l'application d'un vecteur de l'espace de départ) ;

– la dimension de l'espace d'arrivée est inférieure ou égale à celle de l'espace de départ. Ainsi, la dimension de l'image est au plus de 1 dans l'exemple 4, de 2 dans l'exemple 6.

Pour simplifier les équations de ces systèmes, on propose la démarche suivante (que l'on peut également appliquer aux applications linéaires caractérisées par des matrices carrées) :

– il faudra tout d'abord choisir une base dans l'espace de départ en prenant une base orthogonale dans l'espace vectoriel que constitue le noyau, base que l'on complètera. La matrice de changement de base constituera alors une transformation dans l'espace de départ. Dans les exemples 4 et 6, le noyau se réduit au vecteur nul. Il n'y a donc pas de base plus conviviale dans l'espace de départ. Par contre, dans l'exemple 3 ($M_{sr}(\theta)$), le noyau est une droite vectorielle engendrée par le vecteur :

$$\left(e_{C0}\right)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^t$$

On pourra compléter en prenant par exemple les vecteurs :

$$\left(e_{C1}\right)=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}^t$$

et :

$$\left(e_{C2}\right)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^t$$

On trouve alors une matrice de passage qui n'est autre que la matrice de Clarke ;

– il faut ensuite choisir une base dans l'espace d'arrivée tridimensionnel de la façon suivante : construire d'abord une base dans l'espace vectoriel « image » puis la compléter dans l'espace tridimensionnel. On pourra s'imposer la contrainte d'une base orthogonale qui permet une simplification des calculs.

#### 4.4.1. *Cas de l'exemple 4 (matrice $M_{sf}$)*

Dans l'exemple 4, l'image, une droite vectorielle, est engendrée par le vecteur :

$$\left(e_D(\theta)\right)=\begin{bmatrix}\cos(p\theta) & \cos(p\theta-2\pi/3) & \cos(p\theta+2\pi/3)\end{bmatrix}^t$$

Le premier vecteur de la nouvelle base de travail lui sera donc colinéaire. En remarquant que la somme des trois composantes de ce vecteur s'annule, on en

déduit[9] que le vecteur $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ lui est orthogonal. Il suffit ensuite de considérer un vecteur orthogonal aux deux précédents tel :

$$\left(e_Q(\theta)\right) = \left[-\sin(p\theta) \quad -\sin(p\theta - 2\pi/3) \quad -\sin(p\theta + 2\pi/3)\right]^t$$

Il est à noter que le signe « – » est choisi pour que $(e_D(\theta))$ et $(e_Q(\theta))$ forment une base orientée dans le sens direct ($(e_Q)$ a tourné de $+\pi/2$ par rapport à $(e_D)$). Dans cette nouvelle base, l'application linéaire se résume à un gain $M_0$ :

$$m_3(i_f,\theta) = M_0.i_f.\left[\cos(p\theta) \quad \cos(p\theta - 2\pi/3) \quad \cos(p\theta + 2\pi/3)\right]^t = M_0.i_f.\left(e_D(\theta)\right) \qquad [4.50]$$

### 4.4.2. *Cas de l'exemple 6 (matrice $M_{sDQ}$)*

Dans l'exemple 6, les deux premiers vecteurs de la nouvelle base de travail appartiendront au plan image de l'application. Ce dernier est engendré par les deux vecteurs $(e_D(\theta))$ et $(e_Q(\theta))$ déjà définis au paragraphe 4.4.1. Le troisième sera pris orthogonal aux précédents, et donc sera colinéaire à (1 1 1). Dans cette nouvelle base, l'application linéaire se résume à :

$$m_3(i_{DQ},\theta) = M_{aD}.i_D.\left(e_D(\theta)\right) + M_{aQ}.i_Q.\left(e_Q(\theta)\right) \qquad [4.51]$$

REMARQUE.– Lorsqu'un système présente simultanément les cas correspondants à plusieurs exemples, il faut, dans la mesure du possible, choisir une base qui permette simultanément la simplification de tous les sous-systèmes. On utilisera pour ce faire les différents degrés de liberté qui nous sont offerts. C'est ce que nous avons appelé : « choisir des bases conviviales ».

## 4.5. Phaseur complexe : une autre transformation ?

### 4.5.1. *Définitions*

De nombreux auteurs contournent le formalisme matriciel et définissent directement des grandeurs scalaires complexes souvent appelées « phaseurs » [BUH 79, LEO 90], « vecteur complexe » [NOV 00], « vecteur d'espace » [VAS 90] ou encore « transformée à un axe » [CHA 83]. Différentes définitions des phaseurs existent :

9. Propriété du produit scalaire.

$$\underline{x} = k.\left(x_a(t) + a \ x_b(t) + a^2 \ x_c(t)\right) \qquad [4.52]$$

avec $k$ réel et $a$, complexe, racine cubique de l'unité ( $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ). La définition la plus répandue est celle pour laquelle $k = \frac{2}{3}$ [BUH 79, LAZ 87, LEO 90, NOV 00, VAS 90].

REMARQUE.– Dans la suite, nous conserverons l'appellation « vecteur complexe » ou « phaseur temporel ». Ce concept étend au cas des *systèmes triphasés en régime temporel quelconque (transitoire)* un formalisme bien connu des électriciens dans le cas des circuits en régime permanent sinusoïdal, représenté par des vecteurs de Fresnel ou des nombres complexes que l'on peut appeler « phaseur de Fresnel ».

### 4.5.2. *Justification mathématique du phaseur temporel*

Un complexe peut être considéré comme un vecteur d'un plan vectoriel. Par conséquent, pour tout système de dimension 2, il est possible de travailler, non pas dans un plan vectoriel classique (euclidien), mais plutôt dans un plan complexe. Pour l'électrotechnicien, le plan complexe et les techniques de calcul qui lui sont associées sont bien connues du fait de l'utilisation du phaseur de Fresnel (qui est un phaseur complexe) en régime sinusoïdal permanent.

Or, il est apparu lors de l'étude des systèmes triphasés qu'il était toujours possible pratiquement de décomposer l'espace de dimension 3 en une droite et un plan. Ce dernier pourra donc être confondu avec le plan complexe. Si, de plus la composante $x_0$ « homopolaire » est nulle comme cela est fréquemment le cas pour les machines électriques triphasées couplées en triangle ou en étoile sans neutre sorti, alors ce phaseur temporel caractérise entièrement le vecteur $(x_a \ x_b \ x_c)^t$.

Dans [SEM 00], on montre que la projection des trois vecteurs de la base naturelle dans le plan vectoriel associé aux exemples étudiés donne trois vecteurs déphasés de 120° (tout comme les complexes 1, $a$ et $a^2$) dont la norme vaut $\sqrt{2/3}$. Dans le plan, la projection d'un vecteur ($x_3$) quelconque peut alors s'exprimer par :

$$\underline{x} = k.\left(x_a(t) + a.x_b(t) + a^2.x_c(t)\right) \qquad [4.53]$$

avec $k = \sqrt{2/3}$.

On retrouve donc, au coefficient près, la définition du phaseur temporel. En fait, la définition usuelle assure l'égalité entre le module du phaseur temporel et l'amplitude lorsque les trois grandeurs naturelles forment un système équilibré d'amplitude $X_m$. En effet :

$$\begin{aligned}\underline{x} &= k.X_m.\left(\cos(\omega t)+a\ \cos(\omega t-\frac{2\pi}{3})+a^2\ \cos(\omega t+\frac{2\pi}{3})\right)\\ &=\frac{3}{2}.k.X_m.\left(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right)\end{aligned} \qquad [4.54]$$

Le module de $\underline{x}$ vaut bien $X_m$ lorsque $k = 2/3$.

### 4.5.3. *Lien entre phaseur temporel et transformées de Fortescue, de Lyon*

Lors de l'étude des transformées complexes de Fortescue et de Lyon, on a noté les composantes complexes d'un vecteur $(x)$ par $x_0$, $x_+$ et $x_-$. On notera $e_0$, $e_+$ et $e_-$ les vecteurs propres qui permettent de définir :

– soit la matrice de Fortescue, avec :

$$\left(e_{F0}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \left(e_{F+}\right)=\begin{bmatrix}1\\a^2\\a\end{bmatrix},\ \left(e_{F+}\right)=\begin{bmatrix}1\\a\\a^2\end{bmatrix} \qquad [4.55]$$

– soit la matrice de Lyon :

$$\left(e_{L0}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(e_{F0}\right),\ \left(e_{L+}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(e_{F+}\right),\ \left(e_{L-}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(e_{F-}\right)$$

Examinons $x_+$ et $x_-$. Puisque les bases sont orthogonales, il suffit d'effectuer un produit scalaire hermitien :

$$x_+=\frac{\left(e_+\right)^{t*}.\left(x_3\right)}{\left|e_+\right|^2}=k.\left[x_a(t)+a.x_b(t)+a^2.x_c(t)\right] \qquad [4.56]$$

$$x_-=\frac{\left(e_-\right)^{t*}.\left(x_3\right)}{\left|e_-\right|^2}=k.\left[x_a(t)+a^2.x_b(t)+a.x_c(t)\right] \qquad [4.57]$$

On a $k = 1/3$ pour la transformée « classique » de Fortescue, $k = 1/\sqrt{3}$ pour la transformée « normée » de Lyon et $k = 2/3$ pour la transformée « initiale » de Fortescue (qui correspond à la définition « usuelle » des phaseurs). Il apparaît que les deux grandeurs $x_+$ et $x_-$ sont donc conjuguées l'une de l'autre. Si l'on connaît l'une, on déduit l'autre. Une seule des deux suffit[10]. On voit que $x_+$ correspond à la définition générale du phaseur temporel. Par contre, si l'on veut conserver les propriétés qui étaient induites par les transformations de Fortescue ou de Lyon, il faudra revoir le coefficient de pondération $k$ puisque l'on travaille uniquement avec $x_+$ (d'où un facteur 2 ou $\sqrt{2}$ selon que l'on veut conserver l'amplitude ou l'expression de la puissance).

### 4.5.4. *Intérêt/inconvénient*

La notion de phaseur temporel est particulièrement adaptée à l'étude des systèmes triphasés à composante homopolaire nulle. Elle se prête alors à une généralisation de notions acquises lors de l'étude des régimes permanents. On peut en effet définir des schémas « monophasés » équivalents (on retrouve la notion de « transformée à un axe ») valables en régime transitoire. De même, il est possible de réaliser des constructions graphiques analogues à celles de Fresnel, constructions permettant de mettre en évidence visuellement les approximations acceptables (du même type que l'approximation de Kapp pour les transformateurs). Enfin, les onduleurs de tension et de courant triphasés peuvent bénéficier d'une représentation graphique dans le plan complexe.

Par contre, outre les risques de confusion entre modèles de régime transitoire et de régime permanent, cette notion n'est pas aussi générale que l'approche matricielle ou vectorielle, en particulier quand la composante homopolaire n'est pas nulle (cas des signaux à l'entrée des onduleurs). Enfin, le produit scalaire hermitien ne donne plus directement accès à la puissance.

Calculons à cet effet le produit des deux nombres complexes $\underline{v}.\underline{i}^*$ :

$$\underline{v}.\underline{i}^* = k^2.\left(v_a(t) + a.v_b(t) + a^2.v_c(t)\right).\left(i_a(t) + a.i_b(t) + a^2.i_c(t)\right)^* = A_0 + j.B_0 \qquad [4.58]$$

10. Cette propriété est due d'une part au fait que deux des valeurs propres associées à Lyon ou Fortescue sont complexes conjuguées, et d'autre part au fait que les vecteurs $(x_a, x_b, x_c)^t$, dont on cherche l'image par la matrice de Fortescue ou de Lyon, sont à coefficients réels.

[redacted]

On trouve, si $i_a + i_b + i_c = 0$ et $v_a + v_b + v_c = 0$ :

$$A_0 = \frac{3}{2}.k^2.(u_a \quad i_a + u_b \quad i_b + u_c \quad i_c) \text{ et } B_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.k^2.|\underline{i}|.|\underline{v}|.\sin\left(Arg\left(\frac{\underline{v}}{\underline{i}}\right)\right) \quad [4.59]$$

On trouve que si l'on veut que $A_0$ corresponde à la puissance instantanée, il faut prendre, non pas $k = 2/3$ mais $k = \sqrt{2/3}$ (voir formule [4.53]). Le terme en $B_0$, qui fait intervenir un produit vectoriel, peut être associé à des notions de puissances réactives puisqu'il s'annule lorsque tension et courant sont en phase.

## 4.6. Applications aux exemples

### 4.6.1. *Flux statoriques d'une machine synchrone à pôles saillants avec amortisseurs*

Les équations aux flux statoriques font intervenir les matrices des exemples 4 (matrice $M_{sf}$), 5 (matrice $L_{ss}$) et 6 (matrice $M_{SDQ}$). Il faut donc, dans la mesure du possible, trouver une nouvelle base qui vérifie les conditions précédemment déterminées pour les différentes bases de travail adaptées aux exemples. *Par convenance, on s'imposera de plus d'obtenir une base normée.*

Dans l'exemple 5, on a une matrice symétrique non circulante. La recherche des vecteurs propres donnent les trois vecteurs propres unitaires $e_0, e_d, e_q$ associés respectivement à $L_{h0}$, $L_{sd}$ et $L_{sq}$ (voir le paragraphe 4.2.4.2) ; dans la base naturelle triphasée, ces vecteurs propres normés ont pour expression :

$$\begin{aligned}
(e_0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \quad 1 \quad 1]^t \\
(e_d(\theta)) &= \sqrt{\frac{2}{3}}.[\cos(p\theta) \quad \cos(p\theta - 2\pi/3) \quad \cos(p\theta + 2\pi/3)]^t \\
(e_q(\theta)) &= -\sqrt{\frac{2}{3}}.[\sin(p\theta) \quad \sin(p\theta - 2\pi/3) \quad \sin(p\theta + 2\pi/3)]^t
\end{aligned} \quad [4.60]$$

En outre, les exemples 4 ($M_{sf}$) et 6 ($M_{sDQ}$) imposent les vecteurs (nous les choisissons normés) $\vec{e}_0$ et $\vec{e}_d(\theta)$ qui font partie de la base conviviale liée à l'exemple 5 ($L_{ss}$). Il existe donc une base orthonormée directe $(\vec{e}_0, \vec{e}_d(\theta), \vec{e}_q(\theta))$ qui vérifie l'ensemble des contraintes liées aux trois exemples. C'est ce que nous appelons une « base conviviale ».

La direction vectorielle associée au vecteur $\vec{e}_d(\theta)$ est classiquement appelée « axe d », celle perpendiculaire associée au vecteur $\vec{e}_q(\theta)$, « l'axe q ». Enfin, la direction associée au vecteur $\vec{e}_0$ est dite « homopolaire ».

REMARQUE.– Dans la base ( $\vec{e}_d(\theta)$ , $\vec{e}_q(\theta)$ ) les écritures matricielles des vecteurs $\vec{e}_d(\theta)$ et $\vec{e}_q(\theta)$ sont respectivement $(1\ 0)^t$ et $(0\ 1)^t$. La matrice de passage définie par cette base est la matrice de Park, choisie normée ici, $Q_{T3}(p\theta)$ (voir l'équation [4.44]). Il vient donc en notant $x_0$, $x_d$ et $x_q$ les nouvelles coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \end{pmatrix}^t = Q_{3T}(p\theta).\begin{pmatrix} x_0 & x_d & x_q \end{pmatrix}^t \qquad [4.61]$$

Dans la base naturelle, les équations aux flux statoriques sont :

$$\left(\psi_{s3}\right) = L_{ss}(\theta).\left(i_{s3}\right) + M_{sf}(\theta).i_f + M_{sDQ}(\theta).\left(i_{DQ}\right) \qquad [4.62]$$

Les matrices $L_{ss}(\theta)$, $M_{sf}(\theta)$ et $M_{sDQ}(\theta)$ sont respectivement décrites dans les exemples 5, 4 et 6. Dans la nouvelle base de travail, les équations aux flux statoriques deviennent :

$$\begin{aligned} \psi_{0s} &= L_{hs} i_{0s} \\ \vec{\psi}_{dqs} &= L_{sd}.i_{ds}.\vec{e}_d(\theta) + L_{sq}.i_{qs}.\vec{e}_q(\theta) \\ &\quad + \sqrt{\frac{3}{2}}.\left(M_0.i_f + M_{aD}.i_D\right).\vec{e}_d(\theta) + \sqrt{\frac{3}{2}}.M_{aQ}.i_Q.\vec{e}_q(\theta) \end{aligned} \qquad [4.63]$$

Ces expressions mettent en évidence la possibilité d'une décomposition sur deux espaces indépendants : la droite « homopolaire » (coordonnée $\psi_{0s}$) et un plan (vecteur ($\psi_{dqs}$)). Les couplages usuels des machines impliquent que les composantes homopolaires sont nulles. De ce fait, il reste uniquement l'équation dans le plan qui permet de définir ainsi une machine diphasée équivalente. Si l'on décompose à présent sur les vecteurs de la base ( $\vec{e}_0$ , $\vec{e}_d(\theta)$ , $\vec{e}_q(\theta)$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} \psi_{0s} &= L_{hs} i_{0s} \\ \psi_{ds} &= L_{ds}.i_{ds} + \sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.i_f + \sqrt{\frac{3}{2}}.M_{aD}.i_D \\ \psi_{qs} &= L_{qs}.i_{qs} + \sqrt{\frac{3}{2}}.M_{aQ}.i_Q \end{aligned} \qquad [4.64]$$

On aboutit au résultat recherché : les équations obtenues sont beaucoup plus simples que les équations initiales écrites dans les repères naturels. Un point particulièrement important lors de la recherche et l'implantation pratique d'algorithmes de commande vectorielle est la constance des coefficients qui interviennent dans ces équations. On peut alors avoir recours à des outils classiques de l'automatique.

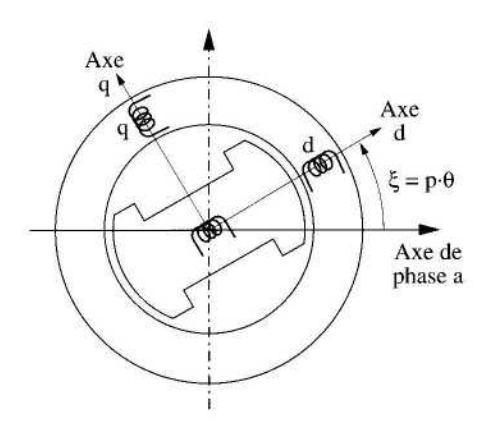



**Figure 4.1.** *Représentation « spatio-temporelle » de la machine synchrone sans amortisseur*

Dans l'expression des vecteurs de la nouvelle base, apparaît $p\theta$ l'angle électrique qui définit la rotation du rotor par rapport à la phase *a* du stator d'une machine bipolaire. Il est naturel de donner la représentation mnémotechnique de la figure 4.1 qui doit être comprise comme la visualisation des deuxième et troisième lignes de l'équation [4.64]. On voit apparaître deux bobinages statoriques en quadrature (donc avec mutuelle nulle) parcourus par des courants $i_{sd}$ et $i_{sq}$. Ces bobinages ont pour inductances propres $L_{sd}$ et $L_{sq}$ et tournent à la vitesse du rotor. Enfin, seul le bobinage de l'axe *d* capte un flux lié à l'excitation créée par le bobinage rotorique.

### 4.6.2. *Flux statoriques d'une machine asynchrone (machine à pôles lisses)*

#### 4.6.2.1. *Approche classique aux valeurs propres*

Les équations statoriques d'une machine asynchrone à pôles lisses font intervenir les exemples 1($L_p$) et 3 ($M_{sr}$). Pour l'exemple 3, il n'existe pas de base de vecteurs propres réels, par contre, il existe une base de vecteurs propres complexes. Par convenance, nous choisissons là aussi de définir une base orthonormée.

Dans l'exemple 3, on a, associé aux trois valeurs propres 0, $\frac{3}{2}M_0 \; e^{jp\theta}$ et $\frac{3}{2}M_0 \; e^{-jp\theta}$, les trois vecteurs propres normés :

$$(e_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}.[1 \quad 1 \quad 1]^t$$

$$(e_+) = \sqrt{\frac{1}{3}}.\left[1 \quad a^2 \quad a\right]^t$$

$$(e_-) = \sqrt{\frac{1}{3}}.\left[1 \quad a \quad a^2\right]^t$$

Par ailleurs, l'exemple 1 n'impose qu'un seul vecteur propre qui est l'un des trois vecteurs imposés par l'exemple 3, à savoir $\vec{e}_0$. A cause de la règle de convivialité, il s'ensuit donc la base orthonormée suivante : $(\vec{e}_0, \vec{e}_+, \vec{e}_-)$. La matrice de passage associée à ce changement de base est la matrice de Lyon [4.41]. Les équations obtenues dans ce cas font intervenir alors les deux valeurs propres :

$$\begin{aligned}
&\psi_{s0} = 0 \\
&\psi_{s+} = L_{sc}.i_{s+} + \frac{3}{2}M_0.e^{jp\theta}.i_{r+} \\
&\psi_{s-} = L_{sc}.i_{s-} + \frac{3}{2}M_0.e^{-jp\theta}.i_{r-}
\end{aligned} \qquad [4.65]$$

La deuxième ligne donne l'expression aux flux statoriques dans le cas d'une formulation avec les phaseurs temporels, que l'on peut réécrire :

$$\underline{\psi}_s = L_{sc}.\underline{i}_s + \frac{3}{2}M_0.e^{jp\theta}.\underline{i}_r \qquad [4.66]$$

4.6.2.2. *Approche vectorielle à l'aide du noyau et de l'image*

Nous allons appliquer à l'exemple 3 (matrice $M_{sr}$) la démarche présentée au paragraphe 4.3.2. Bien que la matrice $M_{sr}$ soit carrée, il nous semble adapté de considérer que l'application linéaire associée possède des espaces vectoriels de départ et d'arrivée distincts, même s'ils sont de même dimension. En effet, les grandeurs de l'espace de départ sont des grandeurs rotoriques, celles de l'espace

d'arrivée des grandeurs statoriques. Physiquement, ces grandeurs existent dans des bobinages qui sont en mouvement les uns par rapports aux autres. Cette approche permet par ailleurs une meilleure cohérence avec l'exemple de la machine synchrone.

La recherche du noyau (ensemble des vecteurs dont l'image vaut le vecteur nul) montre que celui-ci est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (choisi unitaire) :

$$(e_{rT0}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.[1 \quad 1 \quad 1]^t$$

On complète facilement cette base dans l'espace de départ en prenant les vecteurs (également choisis unitaires) $\vec{e}_{rT\alpha}$ et $e_{rT\beta}$ définis par leurs coordonnées dans la base naturelle :

$$(e_{rT\alpha}) = \sqrt{\frac{2}{3}}.\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^t \text{ et } (e_{rT\beta}) = \sqrt{\frac{2}{3}}.\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^t \qquad [4.67]$$

On a déjà considéré cette base $(\vec{e}_{rT0}, \vec{e}_{rT\alpha}, \vec{e}_{rT\beta})$ qui est à l'origine de la matrice de passage de Concordia $T_3$ (normée, voir équation [4.30]). Il vient donc :

$$\begin{bmatrix}i_{r0} & i_{r\alpha} & i_{r\beta}\end{bmatrix}^t = T_3^{-1}.\begin{bmatrix}i_{ra} & i_{rb} & i_{rc}\end{bmatrix}^t = T_3^t.\begin{bmatrix}i_{ra} & i_{rb} & i_{rc}\end{bmatrix}^t \qquad [4.68]$$

L'espace vectoriel « image », qui est donc de dimension au plus égale à 2, s'obtient à présent facilement en considérant les images des vecteurs $\vec{e}_{rT\alpha}$ et $e_{rT\beta}$. A cette fin, on utilise, puisque la matrice est circulante, la relation [4.46] qui donne, étant données les valeurs propres, la factorisation :

$$M_{sr} = T_3.P_3(p\theta).\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}.M_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}.M_0\end{bmatrix}.T_3^{-1} \qquad [4.69]$$

On trouve alors après calculs :

$$M_s.(e_{rT\alpha}) = \frac{3}{2}.M_0.(e_{sd}(\theta))) \text{ et } M_{sr}.(e_{rT\beta}) = \frac{3}{2}.M_0.(e_{sq}(\theta)) \qquad [4.70]$$

Vectoriellement (c'est-à-dire, indépendamment du référentiel), cette expression devient :

$$m_{sr}.\left(\vec{e}_{rT\alpha}\right)=\frac{3}{2}.M_0.\vec{e}_{sd}(\theta)) \text{ et } m_{sr}.\left(\vec{e}_{rT\beta}\right)=\frac{3}{2}.M_0.\vec{e}_{sq}(\theta) \qquad [4.71]$$

Dans cette expression, on a ajouté l'indice $s$ pour préciser que l'on travaille dans l'espace vectoriel associé au stator. Aussi $e_{sd}(\theta)$ et $e_{sq}(\theta)$ ont les mêmes expressions que $e_d(\theta)$ et $e_q(\theta)$ définis précédemment.

Il est donc intéressant de considérer comme base orthonormée de l'espace d'arrivée $\left(\vec{e}_{s0},\vec{e}_{sd}(\theta),\vec{e}_{sq}(\theta)\right)$. Or, cette base est également base de vecteurs propres pour l'application associée à l'exemple 1 ($L_p$). Il vient donc l'équation aux flux suivante :

$$\vec{\psi}_s=L_c.\vec{i}_s+\frac{3}{2}M_0.i_{r\alpha}\vec{e}_{sd}(\theta)+\frac{3}{2}M_0.i_{r\beta}.\vec{e}_{sq}(\theta) \qquad [4.72]$$

Les coordonnées des vecteurs liés aux grandeurs statoriques ($\psi_{dqs}$) et ($i_{dqs}$) sont exprimées dans la base $\left(\vec{e}_{s0},\vec{e}_{sd}(\theta),\vec{e}_{sq}(\theta)\right)$, celles liées aux grandeurs rotoriques dans la base $\left(\vec{e}_{r0},\vec{e}_{rT\alpha},\vec{e}_{rT\beta}\right)$.

REMARQUE.– On peut revenir à une formulation plus classique en ne considérant les coordonnées des différents vecteurs que dans la seule base de Concordia $\left(\vec{e}_{s0},\vec{e}_{s\alpha}(\theta),\vec{e}_{s\beta}(\theta)\right)$. En exprimant les vecteurs $\vec{e}_{sd}(\theta)$ et $\vec{e}_{sq}(\theta)$ dans cette base, $\left(e_{sd}(\theta)\right)=\begin{pmatrix}0 & \cos p\theta & \sin p\theta\end{pmatrix}^t$ et $\left(e_{sq}(\theta)\right)=\begin{pmatrix}0 & -\sin p\theta & \cos p\theta\end{pmatrix}^t$, il vient :

$$\left(\psi_{s\alpha\beta}\right)=L_c\ \left(i_{s\alpha\beta}\right)+\frac{3}{2}M_0.P_2(\theta).\left(i_{r\alpha\beta}\right) \qquad [4.73]$$

où l'on voit apparaître la matrice de rotation d'ordre 2, $P_2(\theta)$ :

$$P_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos p\theta & -\sin p\theta\\ \sin p\theta & \cos p\theta\end{bmatrix} \qquad [4.74]$$

4.6.2.3. *Prise en compte simultanée des équations aux flux statoriques et rotoriques*

On a vu au paragraphe 4.6.2.2 qu'il était intéressant, pour exprimer le flux statorique, de considérer deux bases distinctes : l'une liée aux grandeurs statoriques,

l'autre aux grandeurs rotoriques. Or, il existe également une équation aux flux rotoriques à laquelle la même démarche peut être appliquée. Il s'ensuit *a priori*, si l'on reprend l'exemple de la machine asynchrone, deux bases pour simplifier le flux statorique, deux bases pour simplifier le flux rotorique. En fait, il est possible de trouver seulement deux bases, l'une « statorique », l'autre « rotorique ». Pour les obtenir, il suffit d'opérer un nouveau changement de base, l'un au stator et l'autre au rotor. Dans les deux cas, on appliquera pour cela une rotation dans le plan, d'angle $\xi_s$ au stator, d'angle $\xi_r$ au rotor. C'est la matrice $P_2(\xi)$ (voir l'équation [4.74]) qui est la matrice d'un tel changement de base. Pour la machine asynchrone à pôles lisses, on a :

$$P_2(-\xi_s).(\psi_{s\alpha\beta}) = L_{cs}.P_2(-\xi_s).(i_{s\alpha\beta}) + \frac{3}{2}.M_0.P_2(-\xi_s).P_2(p\theta).(i_{r\alpha\beta})$$

$$P_2(-\xi_r).(\psi_{r\alpha\beta}) = L_{cr}.P_2(-\xi_r).(i_{r\alpha\beta}) + \frac{3}{2}.M_0.P_2(-\xi_r).P_2(-p\theta).(i_{s\alpha\beta})$$

Puisque $P_2(-\xi_s).P_2(p\theta) = P_2(-\xi_s + p\theta)$, il vient :

$$P_2(-\xi_s).(\psi_{s\alpha\beta}) = P_2(-\xi_s).L_c.(i_{s\alpha\beta}) + \frac{3}{2}M_0.P_2(-\xi_s + p\theta).(i_{r\alpha\beta})$$

$$P_2(-\xi_r).(\psi_{r\alpha\beta}) = L_{cr}.P_2(-\xi_r).(i_{r\alpha\beta}) + \frac{3}{2}M_0.P_2(-\xi_r - p\theta).(i_{s\alpha\beta})$$

Pour n'avoir respectivement qu'une seule base liée au stator et une seule liée au rotor (règle de convivialité), il faut :

$$P_2(-\xi_r).(i_{r\alpha\beta}) = P_2(-\xi_s + p\theta).(i_{r\alpha\beta})$$

et :

$$P_2(-\xi_s).(i_{s\alpha\beta}) = P_2(-\xi_r - p\theta).(i_{s\alpha\beta})$$

La relation suivante, appelée « condition de simplification », doit être vérifiée :

$$\xi_s = \xi_r + p\theta \qquad [4.75]$$

En affectant d'un indice 2 les nouvelles coordonnées, il vient, dans le formalisme vectoriel :

$$\vec{\psi}_{s2} = L_c.\vec{i}_{s2} + \frac{3}{2} M_0.\vec{i}_{r2}$$
$$\vec{\psi}_{r2} = L_{cr}.\vec{i}_{r2} + \frac{3}{2} M_0.\vec{i}_{s2} \qquad [4.76]$$

Cette propriété peut être illustrée par la figure 4.2 qui montre que les enroulements d'axe $d$ sont alignés, que les enroulements d'axe $q$ le sont également, et que les axes $d$ et $q$ sont orthogonaux, ce qui explique que les expressions des flux dans la formule [4.76] soient simplifiées au maximum.

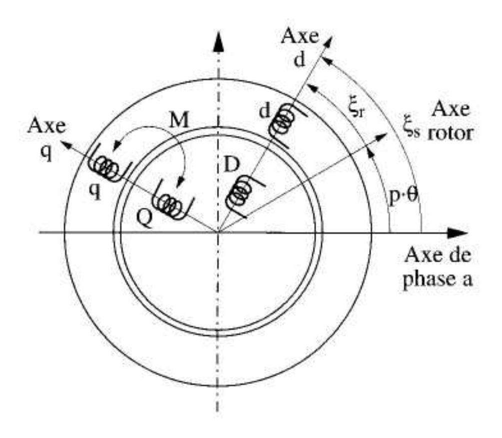



**Figure 4.2**. *Schéma équivalent d'une machine asynchrone après alignement des repères par rotation*

Etant donné que les nouvelles bases ont été obtenues par une rotation, on retrouve encore une fois des matrices de Park comme matrices de passage.

La même démarche appliquée à la machine synchrone mène à choisir le « repère rotorique », c'est-à-dire des axes qui respectent la symétrie de l'enroulement d'excitation. La condition de simplification s'écrit :

$$\xi_s = p\theta \text{ et } \xi_r = 0 \qquad [4.77]$$

REMARQUE.– Le couplage magnétique entre stator et rotor est à l'origine d'un transfert d'énergie. La condition physique pour que ce transfert ait lieu est la synchronisation entre les champs statoriques et rotoriques. Maintenir cette condition (d'autopilotage) $\xi_s = \xi_r + p\theta$ permet de réaliser cette synchronisation.

## 4.7. Equations aux tensions et changement de bases

Lorsque l'on s'intéresse aux équations en tension (voir l'équation [4.2] et l'équation différentielle de l'exemple 7) se greffe alors une nouvelle notion du fait de la présence d'une dérivation temporelle. En effet, la loi de Faraday fait intervenir la dérivée temporelle du flux. Il nous faudra donc considérer des dérivées de vecteurs. Or, il est nécessaire, lorsque l'on dérive un vecteur, de préciser dans quelle base s'effectue cette dérivation. On rappelle dans un premier temps les règles de dérivation bien connues en mécanique pour les appliquer ensuite.

### 4.7.1. *Règles de dérivation : approche vectorielle*

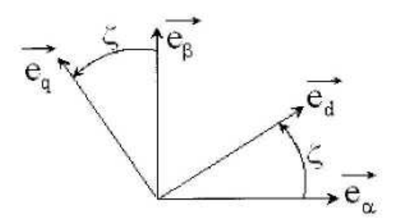



**Figure 4.3.** *Représentation de bases*

Soit deux bases orthonormées directes

$$R_{\alpha\beta}\left(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_\alpha}, \overrightarrow{e_\beta}\right)$$

et :

$$Rdq\left(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_q}\right)$$

représentées figure 4.3. On considère un vecteur $\vec{\psi}_s$ et on indique par un indice $R_{\alpha\beta}$ ou $R_{dq}$ dans quelle base s'effectue la dérivation. On a alors, sous forme vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{\psi}_s}{dt}\right)_{/\mathrm{R}_{\alpha\beta}} = \left(\frac{d\vec{\psi}_s}{dt}\right)_{/\mathrm{R}_{dq}} + \frac{d\xi}{dt}.\vec{e}_0 \wedge \vec{\psi}_s \qquad [4.78]$$

Pour trouver les coordonnées dans le repère $(\alpha,\beta)$ de la dérivée du flux (dans le repère $(\alpha,\beta)$), il ne suffit pas de prendre les coordonnées dans le repère $(d,q)$ de la dérivée du flux (dans le repère $(d,q)$) et de multiplier par la matrice rotation :

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_{s\alpha\beta}\right) \neq P(\xi).\frac{d}{dt}\left(\psi_{sdq}\right)$$

En effet, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_{s\alpha\beta}\right) = \frac{d}{dt}\left[P(\xi)\left(\psi_{sdq}\right)\right] = P(\xi).\frac{d}{dt}\left(\psi_{sdq}\right) + \frac{dP(\xi)}{dt}\left(\psi_{sdq}\right) \qquad [4.79]$$

Comme :

$$\frac{dP(\xi)}{dt} = \frac{d\xi}{dt}.P(\xi).P(+\frac{\pi}{2})$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_{s\alpha\beta}\right) = P(\xi)\,\left[\frac{d}{dt}\left(\psi_{sdq}\right) + \frac{d\xi}{dt}.P(+\frac{\pi}{2}).\left(\psi_{sdq}\right)\right] \qquad [4.80]$$

#### 4.7.2. *Equations aux tensions sous forme phasorielle*

Nous définissons deux types de phaseurs, distingués par un indice supérieur, l'un écrit dans la base fixe du plan diphasé :

$$\underline{x}^{\alpha\beta} = k.\left(x_\alpha + j.x_\beta\right) \qquad [4.81]$$

l'autre dans la base en rotation du plan diphasé :

$$\underline{x}^{dq} = k.\left(x_d + j.x_q\right) \qquad [4.82]$$

Nous introduisons un coefficient $k$ qui donne un degré de liberté sur les propriétés métriques du modèle (conservation de l'amplitude des signaux sinusoïdaux, ou conservation de l'expression des puissances, par exemple). L'expression de changement de base par rotation s'écrit :

$$\underline{x_s^{dq}} = e^{-j.\xi}.\underline{x_s^{\alpha\beta}} \qquad [4.83]$$

[redacted]

Les équations physiques sont tout d'abord écrites dans chaque repère naturel (l'un au stator, l'autre au rotor) :

$$\underline{v_s}^{B_s} = R_s . \underline{i_s}^{B_s} + \left( \frac{d\underline{\psi_s}}{dt} \right)^{B_s}$$

avec $B_s$ base naturelle associée au stator :

$$\underline{v_r}^{B_r} = R_r . \underline{i_r}^{B_r} + \left( \frac{d\underline{\psi_r}}{dt} \right)^{B_r}$$

avec $B_r$ base naturelle associée au rotor.

Ce qui peut aussi s'exprimer par :

$$v_{s\alpha} + j.v_{s\beta} = R_s.\left(i_{s\alpha} + j.i_{s\beta}\right) + \left[ \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} + j \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} \right]$$

$$v_{r\alpha} + j.v_{r\beta} = R_r.\left(i_{r\alpha} + j.i_{r\beta}\right) + \left[ \frac{d\psi_{r\alpha}}{dt} + j \frac{d\psi_{r\beta}}{dt} \right]$$

On évalue à présent, tout comme dans le cas matriciel, la dérivée du flux :

$$\left[ \frac{d\underline{\psi_s}^{(\alpha\beta)}}{dt} \right] = \left[ \frac{d\left(e^{+j\xi} \underline{\psi_s}^{(dq)}\right)}{dt} \right] = e^{+j\xi} . \left[ \frac{d\underline{\psi_s}^{(dq)}}{dt} \right] + j.\frac{d\xi}{dt}.e^{+j\xi} \underline{\psi_s}^{(dq)}$$

$$= e^{+j\xi} . \left[ \frac{d\underline{\psi_s}^{(dq)}}{dt} + j \frac{d\xi}{dt} \underline{\psi_s}^{(dq)} \right]$$

d'où :

$$e^{-j\xi} . \left[ \frac{d\underline{\psi_s}^{(\alpha\beta)}}{dt} \right] = \left[ \frac{d\underline{\psi_s}^{(dq)}}{dt} + j.\frac{d\xi}{dt} \underline{\psi_s}^{(dq)} \right] \qquad [4.84]$$

RÈGLE.– Lorsque l'on cherche à exprimer dans la nouvelle base $(dq)$ la dérivée du phaseur temporel, il ne suffit pas de changer l'indice (de $\underline{x_s^{(\alpha\beta)}}$ à $\underline{x_s^{(dq)}}$), mais on doit remplacer $\left[\dfrac{d\underline{\psi_s}^{(\alpha\beta)}}{dt}\right]$ par $\left[\dfrac{d\underline{\psi_s}^{(dq)}}{dt} + j.\dfrac{d\xi}{dt}\underline{\psi_s}^{(dq)}\right]$.

Au niveau des équations aux tensions, puisque, $\underline{x_s^{dq}} = e^{-j\zeta}\,\underline{x_s^{\alpha\beta}}$, il vient :

$$\underline{v_s}^{dq} = R_s.\underline{i_s}^{dq} + \left[\frac{d\underline{\psi_s}}{dt}\right]^{dq} + j.\frac{d\xi_s}{dt}\underline{\psi_s}^{dq} \qquad [4.85]$$

On vérifie que cela se traduit par :

$$v_{sd} + j.v_{sq} = R_s.\left(i_{sd} + j.i_{sq}\right) + \left[\frac{d\psi_{sd}}{dt} + j.\frac{d\psi_{sq}}{dt}\right] + j.\frac{d\xi_s}{dt}.\left(\psi_{sd} + j\psi_{sq}\right) \qquad [4.86]$$

## 4.8. Essai de synthèse : écriture générale des transformations matricielles sous forme décomposée

### 4.8.1. *Généralités : les différentes variantes*

Nous avons vu la possibilité de diverses transformations, c'est-à-dire des changements de référentiels, donnant aux différentes équations algébriques qui décrivent les convertisseurs électromécaniques une forme aussi simple que possible. Diverses matrices de changement de repère ont été ainsi définies. Il est intéressant d'essayer d'en faire une synthèse. Nous pouvons esquisser la classification suivante :

– il y a d'abord une transformation « triphasée-diphasée (+ homopolaire) » qui peut donner lieu à deux types de variantes :

- une variante réelle, avec les matrices de Clarke $C_3$ et de Concordia $T_3$, ou une variante complexe avec les matrices de Fortescue $F_3$ et de Lyon $L_3$. Dans ce contexte le « phaseur temporel » est la première composante diphasée des transformations de Fortescue ou de Lyon ;

- des variantes dues au fait que, parmi les matrices citées précédemment, certaines ne sont pas « normées » – c'est le cas, par exemple, des matrices initiales de Clarke $C_3$ et Fortescue $F_3$ – et ne conservent pas l'expression de la puissance,

alors que d'autres sont normées[11], et alors elles conservent l'expression de la puissance – c'est le cas des matrices de Concordia $T_3$ et de Lyon $L_3$. Certaines variantes non normées, comme les matrices initiales de Clarke $C_3$ et Fortescue $F_3$, conservent l'amplitude des signaux sinusoïdaux ;

– il y a ensuite une rotation dans le plan diphasé, qui a également deux variantes :

- une variante réelle, qui utilise la matrice de rotation $P_3(\xi)$,

- une variante complexe, qui utilise la matrice $R_3$. Le phaseur se limite à un élément de $R_3(\xi)$, l'exponentiel complexe $e^{j.\xi}$.

On peut écrire explicitement les relations qui existent entre ces différentes approches. Pour cela, nous mettrons en évidence les propriétés liées à l'homopolaire et celles liées aux composantes diphasées, en séparant ces deux types de terme. Alors, on décompose la matrice initiale de Clarke $C_3$ (resp. de Concordia $T_3$) en deux sous-matrices $C_{31}$ et $C_{32}$ (resp. $T_{31}$ et $T_{32}$), et de même, nous décomposons la matrice de Fortescue (resp. de Lyon) en $F_{31}$ et $F_{32}$ (resp. $L_{31}$ et $L_{32}$). Alors, il est très intéressant de faire appel aux matrices de rotation d'ordre 2, dont la variante réelle est $P_2(\xi)$ et la variante complexe est $R_2(\xi)$. La matrice $R_2$ est la matrice diagonale des valeurs propres de $P_2$ qui sont $e^{j.\xi}$ et $e^{-j.\xi}$. On a :

$$P_2(\xi)=\begin{bmatrix}\cos\xi & -\sin\xi\\ \sin\xi & \cos\xi\end{bmatrix}=F_2.R_2(\xi).F_2^{-1}\text{, avec } R_2(\xi)=\begin{bmatrix}e^{j\xi} & 0\\ 0 & e^{-j\xi}\end{bmatrix} \quad [4.87]$$

où $F_2$ est la matrice de Fortescue d'ordre 2 dont l'inverse, à un coefficient 1/2 près, est sa transposée conjuguée :

$$F_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -j & j\end{bmatrix} \text{ et } F_2^{-1}=\frac{1}{2}.F_2^{t*}=\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1 & j\\ 1 & -j\end{bmatrix} \quad [4.88]$$

On observera que les lignes de $F_2^{-1}$ contiennent justement les coefficients qui permettent d'écrire un nombre complexe sous la forme classique : « partie réelle + j. partie imaginaire ». On peut ensuite donner les relations qui existent entre les sous-matrices de Clarke et de Fortescue :

$$F_{31}=C_{31} \text{ et } F_{32}=C_{32}.F_2 \quad [4.89]$$

11. Vocabulaire mathématique : elles sont « orthogonales » (cas réel) ou « unitaires » (cas complexe). Elles respectent les expressions des produits scalaires, donc, en électrotechnique, les expressions des puissances.

### 4.8.2. *Des matrices de Clarke et de Fortescue généralisées, un formalisme unifié, relations de cohérence*

Les paragraphes précédents ont montré que les différentes variantes, normées ou non normées en particulier, étaient générées à partir des matrices de Clarke $C_3$ et de Fortescue $F_3$, que nous qualifions « d'initiales ». Il existe dans la littérature de nombreuses variantes, comme les variantes normées de Concordia et de Lyon, mais on en rencontre d'autres. Nous proposons une notation unifiée ainsi construite : nous notons $Tr_3$ une transformation triphasé-diphasé (+ homopolaire) générale réelle ou complexe. Nous la décomposons en deux sous-matrices : la sous-matrice $Tr_{31}$, colinéaire à la direction homopolaire, et la sous-matrice $Tr_{32}$ dont les colonnes engendrent le plan diphasé. Dans les variantes réelles et complexes, $Tr_{31}$ est proportionnelle à $C_{31}$ ou $F_{31}$ qui sont identiques. Dans la variante réelle, $Tr_{32}$ est proportionnelle à $C_{32}$, et dans la variante complexe, $Tr_{32}$ est proportionnelle à $F_{32}$. Nous proposons d'appeler « matrice de Clarke généralisée », notée $C_{G3}$, et « matrice de Fortescue généralisée », notée $F_{G3}$, les matrices ainsi définies. Pour des raisons de convenance, nous définissons d'abord leurs matrices inverses ; d'abord pour *Clarke généralisée* :

$$C_{G3}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{C1}.C_{31}^{t} \\ k_{C2}.C_{32}^{t} \end{bmatrix} \qquad [4.90]$$

Nous introduisons ainsi les deux *coefficients de pondérations* $k_{C1}$ et $k_{C2}$. La matrice directe définie sous forme décomposée $C_{G3} = \begin{bmatrix} C_{G31} & C_{G32} \end{bmatrix}$ vérifie donc :

$$C_{G31} = \frac{1}{3.k_{C1}}.C_{31} \text{ et } C_{G32} = \frac{2}{3.k_{C2}}.C_{32} \qquad [4.91]$$

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES.– Les coefficients de pondération sont utilisés pour des raisons évidentes : ce sont des notations pratiques, mais les véritables propriétés intéressantes concernent les *longueurs des vecteurs*. Cela concerne tout particulièrement les expressions des puissances ou des amplitudes des variables transformées. On note $l_{C1}$ la longueur du vecteur colonne $C_{G31}$ et $l_{C2}$ la longueur commune aux deux vecteurs-colonnes de $C_{G32}$, on a :

$$l_{C1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{k_{C1}} \text{ et } l_{C2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{1}{k_{C2}} \qquad [4.92]$$

Ensuite, nous nous intéressons à la définition d'une *matrice généralisée de Fortescue d'ordre 2*, notée $F_{G2}$ et son inverse :

[redacted]

$$F_{G2} = \frac{1}{2.k_{F2}'}.F_2 \text{ et } F_{G2}^{-1} = k_{F2}'.F_2^{t*} \qquad [4.93]$$

Le cas normé est intéressant : il s'agit de la matrice de Lyon d'ordre 2, notée $L_2$ :

$$L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.F_2 \text{ donc } k'_{F2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad [4.94]$$

Comme pour la matrice de Clarke, nous définissons une *matrice généralisée de Fortescue d'ordre 3* à partir de son inverse, et nous introduisons les deux coefficients de pondération $k_{F1}$ et $k_{F2}$ (le coefficient $k_{F2}$ a déjà été utilisé avec la notation $k$ à la section 4.5) :

$$F_{G3}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{F1}.F_{31}^{t} \\ k_{F2}.F_{32}^{t*} \end{bmatrix} \qquad [4.95]$$

et la matrice généralisée de Fortescue sous forme décomposée :

$$F_{G3} = \begin{bmatrix} F_{G31} & F_{G32} \end{bmatrix}$$

est donnée par :

$$F_{G31} = \frac{1}{3.k_{F1}}.F_{31} \text{ et } F_{G32} = \frac{1}{3.k_{F2}}.F_{32} \qquad [4.96]$$

Là aussi, ce sont les longueurs des vecteurs colonnes des matrices, $l_{F1}$ pour $F_{G31}$ et $l_{F2}$ pour $F_{G32}$, qui contiennent les informations intéressantes :

$$l_{F1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{k_{F1}} \text{ et } l_{F2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{k_{F2}} \qquad [4.97]$$

Il existe des relations entre les matrices généralisées de Clarke et de Fortescue. Aussi, si l'on écrit des relations analogues à la formule [4.89] :

$$F_{G31} = C_{G31} \text{ et } F_{G32} = C_{G32}.F_{G2} \qquad [4.98]$$

alors, il faut que les coefficients de pondération vérifient une « relation de cohérence » :

$$k_{F2}' = \frac{k_{F2}}{k_{C2}} \qquad [4.99]$$

### 4.8.3. *Des matrices de transformation généralisées*

Nous pouvons envisager une formulation générale, où nous noterons $Tr_3 = \begin{bmatrix} Tr_{31} & Tr_{32} \end{bmatrix}$ la matrice de transformation triphasé-diphasé (+ homopolaire), et $Rot(\xi)$ la matrice de rotation d'ordre 2 généralisée : les deux variantes sont données par le tableau 4.2.

| | **Réelle** | **Complexe** |
|---|---|---|
| $Tr_{31}$ | $C_{G31}$ | $F_{G31}$ |
| $Tr_{32}$ | $C_{G32}$ | $F_{G32}$ |
| $L_1$ | $l_{C1}$ | $L_{F1}$ |
| $L_2$ | $L_{C2}$ | $l_{F2}$ |
| $Rot(\xi)$ | $P(\xi)$ | $R(\xi)$ |

**Tableau 4.2.** *Les deux variantes, réelle et complexe*

Les propriétés métriques s'écrivent aussi :

$$\begin{aligned} & Tr_{31}{}^{t}.Tr_{31} = l_1^{2} \\ & Tr_{32}{}^{t*}.Tr_{32} = l_2{}^{2}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & Tr_{31}{}^{t}.Tr_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad [4.100]$$

Les matrices normées (Concordia et Lyon) donnent des résultats souvent simples car $l_1 = l_2 = 1$.

### 4.8.4. *Une classification des matrices*

Dans la littérature, nous rencontrons différentes matrices de transformation $Tr_3$, et le tableau 4.3 propose une classification.

| **Famille réelle de Clarke** | $k_{C1}$ | $k_{C2}$ | $l_{C1}$ | $l_{C2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Clarke « généralisée »** | $\frac{1}{\sqrt{3}.l_{C1}}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{l_{C2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}.k_{C1}}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{k_{C2}}$ | |
| **Clarke « simple »** | 1 | 1 | $1/\sqrt{3}$ | $\sqrt{2/3}$ | |
| **Clarke « initiale »** | 1/3 | 2/3 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3/2}$ | |
| **Concordia « normée »** | $1/\sqrt{3}$ | $\sqrt{2/3}$ | 1 | 1 | |
| **Famille complexe de Fortescue** | $k_{F1}$ | $k_{F2}$ | $l_{F1}$ | $L_{F2}$ | $k'_{F2}$ |
| **Fortescue « généralisée »** | $\frac{1}{\sqrt{3}.l_{F1}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}.l_{F2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}.k_{F1}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}.k_{F2}}$ | $\frac{l_{C2}}{\sqrt{2}.l_{F2}}$ |
| **Fortescue « simple »** | 1 | 1 | $1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | 1 |
| **Fortescue « classique »** | 1/3 | 1/3 | | $\sqrt{3}$ | |
| **Fortescue « initiale »** | 1/3 | 2/3 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| **Lyon « normée »** | $1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | 1 | 1 | $1/\sqrt{2}$ |

**Tableau 4.3.** *Classification des matrices de Clarke et de Fortescue*

Le tableau 4.3 précise les valeurs des coefficients de transformation (notés $k_1$ et $k_2$ quand la famille réelle ou complexe, n'est pas précisée) et des longueurs des vecteurs colonnes (notés $l_1$ et $l_2$ quand la famille, réelle ou complexe, n'est pas précisée ; quand la famille est précisée on l'indique par $C$ pour la famille réelle de Clarke, et par $F$ pour la famille complexe de Fortescue). Dans le vocabulaire choisi, les adjectifs comme « généralisées », « simples », « initiales », « normées » désignent des matrices réelles (famille de Clarke) et complexes (famille de Fortescue) cohérentes entre elles : elles vérifient les relations [4.98] et [4.99]. Par exemple, les matrices normées de Concordia et de Lyon vérifient :

$$L_{32} = T_{32}.L_2 \quad [4.101]$$

La matrice initiale de Fortescue ($k_{F2} = 2/3$) correspond au « cas usuel » des phaseurs qui conservent l'amplitude des signaux. Les phaseurs qui (*avec une seule composante*) conserveraient l'expression de la puissance auraient un coefficient $k_{F2} = \sqrt{2/3}$.

### 4.8.5. *Une décomposition des matrices carrées de dimension 3 × 3*

Nous avons donné pour les matrices carrées de dimensions 3 × 2, notées $M_3$ (exemples 2, 3 et 4) des diagonalisations.

Mais nous pouvons aussi en donner des décompositions où l'on sépare les propriétés associées à la valeurs propre homopolaire, notée $\lambda_h$ ou $\lambda_0$ et les propriétés associées aux valeurs propres diphasées, notées $\lambda_1$ et $\lambda_2$, qui sont aussi les valeurs propres d'une matrice adéquate, de dimension 2 × 2, notée $M_2$.

Une factorisation décomposée peut avoir les formes suivantes :

$$M_3 = \begin{bmatrix} Tr_{31} & Tr_{32} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & M_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{1}{l_1^2} . Tr_{31}{}^t \\ \dfrac{1}{l_2^2} . Tr_{32}{}^{t*} \end{bmatrix} \qquad [4.102]$$

$$M_3 = \frac{\lambda_h}{l_1^2} . Tr_{31} . Tr_{31}{}^t + \frac{1}{l_2^2} . Tr_{32} . M_2 . Tr_{32}{}^{t*} \qquad [4.103]$$

Nous pouvons donner des exemples représentatifs, par exemple pour $L_p$ (exemple 1), où :

$L_h = L + 2.M$ et $L_c = L - M$

la forme générale est :

$$L_p = \frac{L_h}{l_1^2} . Tr_{31} . Tr_{31}{}^t + \frac{L_c}{l_2^2} . Tr_{32} . Tr_{32}{}^{t*} \qquad [4.104]$$

Les quatre factorisations les plus intéressantes sont données par le tableau 4.4.

| *Lp* | Réel | Complexe |
|---|---|---|
| Non normé (Clarke et Fortescue) | $L_p = \frac{L_h}{3}.C_{31}.C_{31}{}^t + \frac{2.L_c}{3}.C_{32}.C_{32}{}^t$ | $L_p = \frac{L_h}{3}.F_{31}.F_{31}{}^t + \frac{L_c}{3}.F_{32}.F_{32}{}^{t*}$ |
| Normé Concordia et Lyon) | $L_p = L_h.T_{31}.T_{31}{}^t + L_c.T_{32}.T_{32}{}^t$ | $L_p = L_h.L_{31}.L_{31}{}^t + L_c.L_{32}.L_{32}{}^{t*}$ |

**Tableau 4.4.** *Factorisation des matrices Lp*

Les exemples 2 et 3 présentent l'intérêt d'avoir une valeur propre homopolaire nulle : les factorisations décomposées sont donc particulièrement simples. La forme générale pour la matrice $G$ (exemple 2) est donnée par :

$$G = \frac{1}{l_2{}^2}.Tr_{32}.Tr_{32}{}^{t*} \qquad [4.105]$$

Le tableau 4.5 donne quatre exemples significatifs.

| *G* | Réel | Complexe |
|---|---|---|
| Non normé (Clarke et Fortescue) | $G = \frac{2}{3}.C_{32}.C_{32}{}^t$ | $G = \frac{1}{3}.F_{32}.F_{32}{}^{t*}$ |
| Normé (Concordia et Lyon) | $G = T_{32}.T_{32}{}^t$ | $G = L_{32}.L_{32}{}^{t*}$ |

**Tableau 4.5.** *Factorisation des matrices G*

On notera ici les formes particulièrement simples données par les matrices normées, qui montrent explicitement que les deux valeurs propres diphasées sont égales à 1. La nullité de la valeur propre homopolaire fait disparaître les termes contenant $Tr_{31}$. Cela formalise *la propriété* suivante : quelle que soit la composante homopolaire injectée à l'entrée de l'onduleur, cette composante homopolaire est éliminée à la sortie, c'est-à-dire sur la charge.

Ensuite, nous considérons des factorisations décomposées pour la matrice $M_{sr}(\theta)$. La forme générale est donnée par :

$$M_{sr}(\theta) = \frac{1}{l_2{}^2} \cdot \frac{3}{2} M_0 . Tr_{32} . Rot(p\theta) . Tr_{32}{}^{t*} \qquad [4.106]$$

Quatre exemples significatifs sont donnés par le tableau 4.6.

| $M_{sr}(\theta)$ | **Réel** | **Complexe** |
|---|---|---|
| Non normé (Clarke et Fortescue) | $M_0 . C_{32} . P(p\theta) . C_{32}{}^t$ | $\frac{1}{2} M_0 . F_{32} . R(p\theta) . F_{32}{}^{t*}$ |
| Normé (Concordia et Lyon) | $\frac{3}{2} . M_0 . T_{32} . P(p\theta) . T_{32}{}^t$ | $\frac{3}{2} M_0 . L_{32} . R(p\theta) . L_{32}{}^{t*}$ |

**Tableau 4.6.** *Factorisation des matrices $M_{sr}$*

Les factorisations avec les matrices normées mettent en évidence les amplitudes des valeurs propres diphasées. La factorisation avec des matrices $Tr_{32}$, orthogonales au vecteur $Tr_{31}$, montre la propriété suivante : les composantes homopolaires présentes au stator ne sont pas transmises au rotor.

### 4.8.6. *Factorisation des systèmes triphasés et des matrices rectangulaires*

Pour les systèmes triphasés et les opérateurs rectangulaires, on ne peut écrire de diagonalisation, mais on peut écrire des formes factorisées.

Nous avons donné en [4.8], l'expression d'un système triphasé fondamental ; Avec les matrices que nous venons de définir, et un vecteur de longueur 1, noté $u$, défini par le tableau 4.7, nous pouvons l'écrire sous une forme unifiée :

$$(x_3) = \frac{1}{l_2} . \sqrt{3} . X . Tr_{32} . Rot(\xi) . u \qquad [4.107]$$

où $X$ est l'amplitude efficace : $X = X_m / \sqrt{2}$.

| | **Cas réel** | **Cas complexe** |
|---|---|---|
| $u$ | $u_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $u_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

**Tableau 4.7.** *Les deux variantes du vecteur u*

Le tableau 4.8 donne quatre factorisations représentatives des systèmes triphasés.

| **(x3)direct** | **Réel** | **Complexe** |
|---|---|---|
| Non normé (Clarke et Fortescue) | $\sqrt{2}.X.C_{32}.P(\omega.t+\alpha).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ | $X.F_{32}.R(\omega.t+\alpha).\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ |
| Normé (Concordia et Lyon) | $\sqrt{3}.X.T_{32}.P(\omega.t+\alpha).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ | $\sqrt{3}.X.L_{32}.R(\omega.t+\alpha).\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ |

**Tableau 4.8.** *Quatre factorisations des systèmes triphasés (X est l'amplitude efficace)*

Une application de la factorisation des systèmes triphasés concerne la matrice de couplage stator-excitation des machines synchrones : c'est la matrice $M_{sf}(\theta)$ (exemple 4). Une forme générale est donnée par :

$$M_{sf}(\theta) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.Tr_{32}.Rot(p\theta).u \quad [4.108]$$

Quatre factorisations représentatives de $M_{sf}$ sont données par le tableau 4.9.

| $M_{sf}$ | **Réel** | **Complexe** |
|---|---|---|
| $Msf(\theta)$ Non normée | $M_0.C_{32}.P(p\theta).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}.M_0.F_{32}.R(p\theta).\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ |
| $Msf(\theta)$ Normée | $\sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.T_{32}.P(p\theta).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ | $\sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.L_{32}.R(p\theta).\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ |

**Tableau 4.9.** *Quatre factorisations de la matrice* $M_{sf}$

La matrice de couplage entre le stator et les amortisseurs d'une machine synchrone peut avoir la factorisation générale suivante :

$$M_{sDQ}(\theta) = k.Tr_{32}.Rot(p\theta).S \quad [4.109]$$

où le coefficient $k$ et la matrice $S$ ont des valeurs adéquates. Nous donnons deux exemples représentatifs, avec la matrice de Clarke (cas réel), puis avec la matrice de Fortescue (cas complexe) :

$$M_{sDQ}(\theta) = C_{32}.P(p\theta).\begin{bmatrix} M_{aD} & 0 \\ 0 & M_{aQ} \end{bmatrix} \quad [4.110]$$

$$M_{sDQ}(\theta) = \frac{1}{2}.F_{32}.R(p\theta).\begin{bmatrix} M_{aD} & j.M_{aQ} \\ M_{aD} & -j.M_{aQ} \end{bmatrix} \quad [4.111]$$

L'exemple réel [4.110] donne pour $S$ une matrice diagonale. Cela explique pourquoi la transformée de Park, réelle, est la plus utilisée pour modéliser les machines synchrones.

Nous revenons à un exemple de matrice carrée, la matrice $L_{ss2}(\theta)$ qui intervient dans l'expression de la matrice des inductances statoriques des machines synchrones à pôles saillants. Une factorisation générale est :

$$L_{ss2}(\theta) = \frac{1}{l_2^{\,2}}.\frac{3}{2}.L_{s2}.Tr_{32}.Rot(p\theta).S.Rot(-p\theta).Tr_{32}^{\;t*} \quad [4.112]$$

où la matrice $S$ est une matrice adéquate de dimension $2 \times 2$ dont les valeurs propres sont $+1$ et $-1$. Elle aura en pratique l'une des deux formes données dans le tableau 4.10.

| | **Cas réel** | **Cas complexe** |
|---|---|---|
| $S$ | $S_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | $S_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

**Tableau 4.10.** *Les deux variantes de S*

Nous donnons deux exemples caractéristiques, avec la matrice de Clarke (cas réel), puis avec la matrice de Fortescue (cas complexe) :

$$L_{ss2}(\theta) = L_{s2}.C_{32}.P(p\theta).S_R.P(-p\theta).C_{32}^{\;t} \quad [4.113]$$

$$L_{ss2}(\theta) = \frac{1}{2}.L_{s2}.F_{32}.R(p\theta).S_C.R(-p\theta).F_{32}^{\;t*} \quad [4.114]$$

Les factorisations avec les matrices normées de Concordia ou Lyon se déduisent immédiatement de la formule générale [4.112] en posant $l_2 = 1$. Nous pouvons en déduire que les valeurs propres de $L_{ss2}$ sont $\pm(3/2).L_{s2}$. Ici aussi, nous observons que les cas réels débouchent sur une matrice $S$ qui est diagonale. Cela explique la prédominance de la transformée de Park pour modéliser les machines synchrones à pôles saillants.

### 4.8.7. *Forme générale des transformations triphasées-diphasées de type Clarke-Fortescue*

Les outils précédents nous permettent de définir une forme générale des transformations triphasées-diphasées (+ homopolaire), que celle-ci soit réelle (famille de Clarke) ou qu'elle soit complexe (de la famille de Fortescue) :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = (x_3) = Tr_3.\begin{bmatrix} x_0 \\ (x_2) \end{bmatrix} \qquad [4.115]$$

où la composante homopolaire $x_0$ a, en pratique, la même forme que la transformation soit réelle ou complexe. La variable diphasée $(x_2)$ a deux formes possibles, comme déjà défini en [4.6] (réel) et [4.7] (complexe). Les factorisations sous forme décomposée que nous venons de définir nous encouragent à utiliser une forme décomposée de cette transformation, où nous séparons la composante homopolaire des composantes diphasées :

$$(x_3) = Tr_3.\begin{bmatrix} x_0 \\ (x_2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Tr_{31} & Tr_{32} \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} x_0 \\ (x_2) \end{bmatrix} = Tr_{31}.x_0 + Tr_{32}.(x_2) \qquad [4.116]$$

Nous pouvons déduire de la relation [4.116] une représentation graphique (figure 4.3) : il s'agit d'un schéma fonctionnel (voir figure 4.4) utile pour la conception des commandes de type vectoriel.

L'inversion de la définition directe [4.116] est immédiate ([4.117] et [4.118]) :

$$x_0 = \frac{1}{l_1^2} Tr_{31}{}^t.(x_3) \qquad [4.117]$$

$$(x_2) = \frac{1}{l_2^2} Tr_{32}{}^{t*}.(x_3) \qquad [4.118]$$

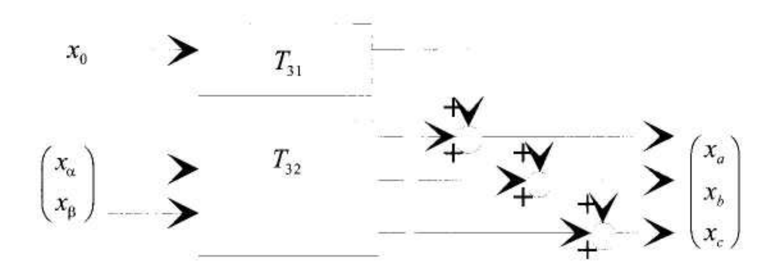



**Figure 4.4.** *Schéma fonctionnel associé à une transformée directe en composantes symétriques*

Là aussi, on peut en déduire un schéma fonctionnel utile en contrôle vectoriel (figure 4.5).

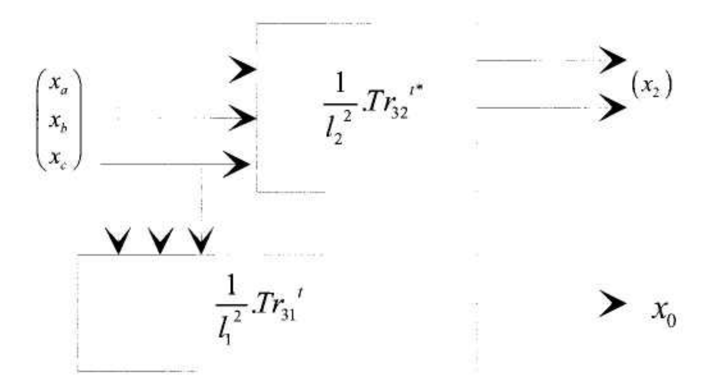



**Figure 4.5.** *Schéma fonctionnel associé à une transformée inverse en composantes symétriques*

### 4.8.8. *Applications de la transformation triphasé-diphasé de type Clarke-Fortescue*

Nous considèrerons d'abord la transformée de Clarke-Fortescue d'un système triphasé. La factorisation [4.107] permet de déterminer très facilement la composante homopolaire, qui est évidemment nulle, et les composantes diphasées :

$$x_0 = 0 \qquad [4.119]$$

$$(x_2) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{3}.X.Rot(\xi).u \qquad [4.120]$$

Nous observons ici que la transformée initiale de Clarke ($l_2 = l_{C2} = \sqrt{3/2}$) conserve l'amplitude des signaux sinusoïdaux $\sqrt{2}.X$, tandis que les transformées normées ($l_2 = 1$) ne les conservent pas ; l'amplitude est alors $\sqrt{3}.X$. Notons que les deux variantes réelle et complexe de *Rot(ξ).u* sont donnés par le tableau 4.11.

| | **Réel** | **complexe** |
|---|---|---|
| $Rot(\xi).u$ | $\begin{bmatrix} \cos\xi \\ \sin\xi \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{bmatrix} e^{j\xi} \\ e^{-j\xi} \end{bmatrix}$ |

**Tableau 4.11.** *Image par rotation de u (tableau 4.7)*

Considérons ensuite la transformée de l'expression de la puissance en triphasé :

$$p = v_a.i_a + v_b.i_b + v_c.i_c = (v_3)^{t*}.(i_3) = l_1^2.v_0.i_0 + l_2^2.v_2^{t*}.i_2 \qquad [4.121]$$

On observe clairement l'effet de la métrique des matrices de transformation sur l'expression de la puissance. Bien sûr, dans le cas des transformées normées ($l_1 = l_2 = 1$), l'expression de la puissance est conservée, ce qui est l'intérêt des transformées de Concordia et de Lyon.

Considérons maintenant l'exemple 1, c'est-à-dire le flux propre d'une armature à pôles lisses, définies par la matrice $L_p$ dont nous avons donné les factorisations par l'équation [4.104] et dans le tableau 4.4. Quelles que soient les transformées utilisées (réelles ou complexes, normées ou non normées), la forme des équations obtenues est invariante et les composantes homopolaire et diphasée vérifient :

$$\psi_0 = L_h.i_0 \qquad [4.122]$$

$$(\psi_2) = L_c.(i_2) \qquad [4.123]$$

Considérons ensuite l'exemple 2 de la matrice $G$ dont les factorisations ont été données par la formule [4.105] et le tableau 4.5. La composante homopolaire de la tension de sortie appliquée sur la charge est toujours nulle, et les composantes diphasées de cette tension sont conservées telles quelles, soit :

$$v_{0s} = 0 \qquad [4.124]$$

$$(v_{2s}) = (v_{2e}) \qquad [4.125]$$

Considérons enfin l'exemple 3 : l'effet du couplage entre le rotor et le stator d'une machine asynchrone, modélisé par la matrice $M_{sr}(\theta)$ dont des factorisations ont été données par l'équation [4.106] et le tableau 4.6. La composante homopolaire est nulle et la composante diphasée met en évidence l'effet de la rotation :

$$\psi_{0s} = 0 \qquad [4.126]$$

$$\left(\psi_{2s}\right) = \frac{3}{2} M_0 . Rot(p\theta) . \left(i_{2r}\right) \qquad [4.127]$$

Cette dernière relation montre bien l'intérêt d'une nouvelle transformation : la rotation du repère dans le plan diphasé.

### 4.8.9. *Rotation des repères*

La définition générale d'une rotation des repères dans le plan diphasé est donnée par :

$$\left(x_2\right) = Rot(\xi) . \left(x_{dq}\right) \qquad [4.128]$$

#### 4.8.9.1. *Schéma fonctionnel associé à la transformation directe*

L'équation [4.128] peut être associée à un schéma fonctionnel comme celui défini par la figure 4.6. Ce schéma fonctionnel est aussi le schéma de base du « contrôle vectoriel » des machines à courant alternatif.

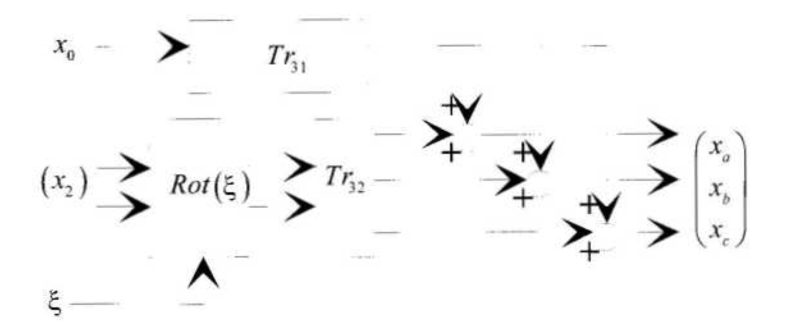



**Figure 4.6.** *Schéma fonctionnel associé à une transformation de Park-Ku*

L'inversion de la formule [4.128] est immédiatement définie par :

$$\left(x_{dq}\right) = \left(Rot(\xi)\right)^{-1} . \left(x_2\right) = Rot(-\xi) . \left(x_2\right) = Rot(\xi)^{t^*} . \left(x_2\right) \qquad [4.129]$$

4.8.9.2. *Schéma fonctionnel associé à la transformation inverse*

L'équation [4.129] peut être associée à un schéma fonctionnel comme celui défini par la figure 4.7. Ce schéma peut servir à décrire l'opération d'estimation que l'on doit faire dans le cas du « contrôle vectoriel » des machines à courant alternatif.

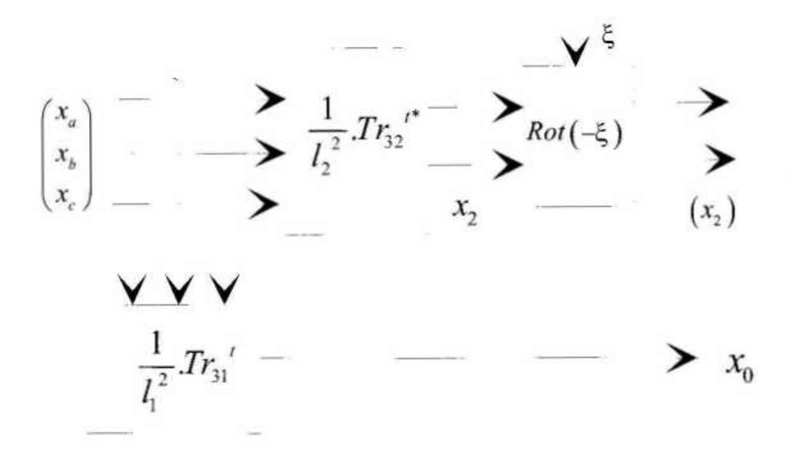



**Figure 4.7.** *Schéma fonctionnel associé à la transformation inverse de Park-Ku*

### 4.8.10. *Application des rotations aux systèmes triphasés équilibrés directs en régime permanent*

Considérons un système triphasé classique (courants, tensions, flux en régime sinusoïdal permanent) d'amplitude efficace $X$, de pulsation $\omega$ et de déphasage$\varphi$. Une factorisation générale diphasée se déduit de la formule [4.120] :

$$(x_2) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{3}.X.Rot(\omega.t + \varphi).u \qquad [4.130]$$

Une rotation d'angle $\xi$ donnée par l'équation [4.129] donne :

$$(x_{dq}) = Rot(-\xi).(x_2) = Rot(-\xi).\frac{1}{l_2}.\sqrt{3}.X.Rot(\omega.t + \varphi).u \qquad [4.131]$$

donne :

$$(x_2) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{3}.X.Rot(\omega.t + \varphi - \xi).u \qquad [4.132]$$

De cette formule se déduisent des propriétés classiques des systèmes triphasés statoriques, suivant le repère où l'on se place :

– dans le « repère statorique », défini par $\xi = 0$, les grandeurs diphasées sont, évidemment à la pulsation d'origine, ω, et leur expression est toujours [4.130] ;

– dans le « repère rotorique » d'une machine asynchrone : si celui-ci tourne à la vitesse $\Omega = (1-g).\omega / p$ où $g$ est le classique « glissement », l'angle de rotation $\xi$ vérifie $\xi = (1-g).\omega.t + \xi_0$, alors les variables diphasées transformées ont pour expression :

$$x_2 = \frac{1}{l_2}.\sqrt{3}.X.Rot(g.\omega.t + \varphi - \xi_0).u$$

Elles sont donc à la pulsation rotorique $g.\omega$ ;

– dans le « repère du champ tournant » qui tourne à la vitesse de synchronisme $\Omega = \omega / p$, l'angle $\xi$ vérifie $\xi = \omega.t + \xi_0$ ; alors les variables diphasées transformées ont pour expression :

$$x_2 = \frac{1}{l_2}.\sqrt{3}.X.Rot(\varphi - \xi_0).u$$

Elles sont constantes, ce qui explique que ce repère est très utilisé pour étudier les performances des machines à courant alternatif.

#### 4.8.11. *Quelques applications des changements de repère par rotation*

Les modèles des exemples 1 (flux dans une machine à pôles lisses modélisé par $L_p$) et 2 (gain d'un onduleur de tension, modélisé par $G$) ne peuvent pas être encore plus simplifiés par une rotation. Vérifions le : pour l'exemple 1 (flux propre d'une armature à pôles lisses), le modèle diphasé est donné par la formule [4.127]. La rotation de repère est prise pour un angle de rotation quelconque ξ et est donnée par l'équation [4.128] :

$$(\psi_2) = Rot(\xi).(\psi_{dq}) \text{ et } (i_2) = Rot(\xi).(i_{dq}) \qquad [4.133]$$

et l'on obtient :

$$(\psi_{dq}) = L_c.(i_{dq}) \qquad [4.134]$$

Pour l'exemple 2 (gain de l'onduleur de tension), le modèle diphasé est donné par l'équation [4.125] : $(v_{2s}) = (v_{2e})$. Les rotations de repère sont prises pour des angles de rotation arbitraires : $\xi_e$ pour la variable d'entrée, et $\xi_s$ pour les variables de sorties ; les rotations sont données par la formule [4.128]. Ici, on a :

$$(v_{s2}) = Rot(\xi_s).(v_{sdq}) \text{ et } v_{2e} = Rot(\xi_e).v_{dqe} \qquad [4.135]$$

La condition de simplification pour les onduleurs est :

$$\xi_e = \xi_s \qquad [4.136]$$

Et le modèle dans tout repère tournant est :

$$v_{dqs} = v_{dqe} \qquad [4.137]$$

### 4.8.12. *Application aux flux mutuels entre le stator et le rotor d'une machine asynchrone*

Comme déjà expliqué au paragraphe 4.6.2.3, on fait deux rotations de repère, l'une concernant les variables statoriques (rotation d'angle $\xi_s$) et une concernant les variables rotoriques (angle $\xi_r$). Appliqués à l'exemple 3 (flux mutuel stator-rotor), on pose donc :

$$\begin{aligned}(\psi_{s2}) &= Rot(\xi_s).(\psi_{sdq}) \\ (i_{r2}) &= Rot(\xi_r).(i_{rdq})\end{aligned} \qquad [4.138]$$

On reporte l'équation [4.138] dans la formule [4.127] :

$$Rot(\xi_s).(\psi_{sdq}) = \frac{3}{2}.M_0.Rot(p\theta + \xi_r).(i_{rdq}) \qquad [4.139]$$

On voit immédiatement que l'équation [4.139] se simplifie (indépendance vis-à-vis des angles de rotation) si l'on pose la « condition de simplification » :

$$\xi_s = p\theta + \xi_r \qquad [4.140]$$

Cette condition est tout à fait fondamentale. Grâce à elle, le modèle [4.127] se simplifie dans la forme la plus simple possible, où apparaît seulement l'amplitude de la valeur propre diphasée :

$$\psi_{dqs} = \frac{3}{2}.M_0.i_{dqr} \qquad [4.141]$$

### 4.8.13. *Application aux expressions des flux pour une machine synchrone*

Pour les exemples issus du moteur synchrone, commençons par l'exemple 4 : le modèle du flux statorique créé par l'excitation monophasée d'une machine synchrone, modélisée par $M_{sf}$. Ce modèle est donné par la formule [4.16] et la factorisation générale est [4.108]. Dans ce modèle, on ne peut évidemment pas transformer la variable rotorique qui est monophasée. On ne peut transformer que la variable statorique triphasée. On utilise la transformation générale de Park et Ku (équation [4.116]) que l'on reporte dans la formule [4.16]. On écrit :

$$\left(\psi_{s3}\right) = Tr_{31}\psi_{s0} + Tr_{32}.Rot(\xi_s).\left(\psi_{sdq}\right) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.Tr_{32}.Rot(p\theta).u.i_f \qquad [4.142]$$

d'où, pour la composante homopolaire :

$$\text{d'où } \psi_{0s} = 0 \qquad [4.143]$$

et pour les composantes diphasées :

$$\left(\psi_{sdq}\right) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.Rot(p\theta - \xi).u.i_f \qquad [4.144]$$

On retrouve la condition de simplification [4.77] pour les machines synchrones. L'équation [4.144] se simplifie si $\xi = p\theta$, et alors l'équation [4.144] devient :

$$\left(\psi_{sdq}\right) = \frac{1}{l_2}.\sqrt{\frac{3}{2}}.M_0.u.i_f \qquad [4.145]$$

Ce modèle a été illustré par la figure 4.1. On peut alors dire que les équations relatives aux deux enroulements sont dans un « système de coordonnées commun » [BUH 79, LAZ 90]. La relation de simplification [4.77] est fondamentale pour l'autopilotage en position de la machine synchrone, qui est aussi un contrôle vectoriel. Considérons ensuite l'exemple 5, paragraphe 4.2.4.2 : modèle du flux statorique propre d'une machine synchrone à pôles saillants. Il est donné par la formule [4.17] et il faut utiliser la décomposition de $L_{ss0}$ donnée par [4.104] et la factorisation de $L_{ss2}(\theta)$ donnée par [4.112]. On écrit les transformées générales de Park et Ku du flux et du courant statoriques :

$$\left(\psi_{s3}\right) = Tr_{31}.x_{0s} + Tr_{32}.Rot(\xi_s).\left(x_{sdq}\right) \qquad [4.146]$$

$$\left(i_{s3}\right) = Tr_{31}.i_{s0} + Tr_{32}.Rot(\xi_s).i_{sdq} \qquad [4.147]$$

L'inversion des équations donne la composante homopolaire qui vérifie :

$$\psi_{0s} = L_{hs}.i_{0s} \qquad [4.148]$$

et en appliquant la condition de simplification [4.77], $\xi_s = p\theta$ , on obtient l'équation sur les composantes relatives :

$$\psi_{dqs} = \left(L_{cs}.I_2 + \frac{3}{2}.L_{s2}.S\right).i_{dqs} \qquad [4.149]$$

C'est la généralisation matricielle des résultats vus aux paragraphes 4.2.4.2 et 4.8.6. Nous avons vu que la matrice $S$ est diagonale dans le cas de la transformation réelle de Park (tableau 4.10).

### 4.8.14. *Application à la dérivation dans les repères tournants*

Nous considérons l'équation différentielle fondamentale (du type de la formule [4.2]) qui contient une équation. Elle est d'abord écrite dans le repère naturel de l'enroulement triphasé considéré :

$$v_3 = R.i_3 + \frac{d\psi_3}{dt} \qquad [4.150]$$

Le passage en composantes symétriques est immédiat (voir formules [4.117], [4.118] et [4.129]) ; d'abord pour la composante homopolaire :

$$v_0 = R.i_0 + \frac{d\psi_0}{dt} \qquad [4.151]$$

puis pour les composantes relatives diphasées :

$$\begin{aligned} \left(v_2\right) &= Rot(\xi).\left(v_{dq}\right) \\ &= Rot(\xi).R.\left(i_{dq}\right) + Rot(\xi).\frac{d\left(\psi_{dq}\right)}{dt} + \frac{d\xi}{dt}.Rot(\xi + \frac{\pi}{2}).\left(\psi_{dq}\right) \end{aligned} \qquad [4.152]$$

Ce qui donne l'équation fondamentale :

$$\left(v_{dq}\right) = R.\left(i_{dq}\right) + \frac{d\left(\psi_{dq}\right)}{dt} + \frac{d\xi}{dt}.Rot(\frac{\pi}{2}).\left(\psi_{dq}\right) \qquad [4.153]$$

Donc, dans un repère tournant, la dérivée d'une composante relative de flux est de la forme :

$$\frac{d\left(\psi_{dq}\right)}{dt} + \frac{d\xi}{dt}.J_2.\left(\psi_{dq}\right) \qquad [4.154]$$

où $J_2 = Rot(\pi / 2)$ est la matrice de rotation d'angle π/2, qui vérifient $\left(J_2\right)^2 = -I_2$, et dont il existe deux variantes :

| | **Réel** | **Complexe** |
|---|---|---|
| $J_2$ | $J_{2R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $J_{2C} = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$ |

**Tableau 4.12.** *Les deux variantes de* $J_2$

## 4.9. Transformations généralisées de Park et Ku

### 4.9.1. *Généralités : transformations décomposées/globales*

Nous avons déjà défini des transformations généralisées qui s'appuient sur deux types de distinctions :

– ces transformations peuvent être réelles ou complexes : nous avons unifié cette distinction en proposant le formalisme noté avec les matrices Tr3 et Rot($\xi$) ;

– les transformations peuvent être normées ou non normées. Nous avons unifié cette question en introduisant les coefficients de pondération k et les longueurs des vecteurs colonnes l des matrices Tr3. Nous avons également introduit la « condition de cohérence » pour unifier les propriétés métriques.

Ce point de vue unifié permet deux approches :

– une approche « décomposée », qui est celle que nous avons le plus privilégié ici, puisque nous déterminons séparément, et par étape :

- la composante homopolaire $x_0$ par l'équation [4.117],

- la composante diphasée $x_2$ (dite « composante symétrique ») dans le référentiel naturel, par la formule [4.118],

- la composante diphasée $x_{dq}$ (dite « composante relative ») dans le référentiel obtenu par rotation, par la formule [4.129] ;

– une approche « globale » où l'on définit les composantes relatives en une seule étape :

$$(x_3) = QK_{G3}(\xi).\begin{bmatrix} x_0 \\ (x_{dq}) \end{bmatrix} \quad [4.155]$$

où $QK_{G3}(\xi)$ est appelée ici « matrice de Park-Ku généralisée ». L'inversion est :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ (x_{dq}) \end{bmatrix} = \left(QK_{G3}(\xi)\right)^{-1}.(x_3) \quad [4.156]$$

Une forme décomposée de $QK_{G3}(\xi)$ est donnée par :

$$QK_{G3}(\xi) = \begin{bmatrix} QK_{G31} & QK_{G32}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tr_{31} & Tr_{32}.Rot(\xi) \end{bmatrix} \quad [4.157]$$

Une forme décomposée de l'inverse est donnée par :

$$\left(QK_{G3}(\xi)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{l_1^{\,2}} Tr_{31}{}^{t} \\ \dfrac{1}{l_2^{\,2}}.Rot(-\xi).Tr_{32}{}^{t*} \end{bmatrix} \quad [4.158]$$

Le diagramme de la figure 4.8 permet d'illustrer ces deux approches :



**Figure 4.8.** *Diagramme des transformations généralisées en deux étapes*

La matrice $QK_{G3}(\xi)$ a deux variantes principales, la variante réelle, dite « matrice généralisée de Park » :

$$Q_{G3}(\xi)=\left[Q_{G31} \quad Q_{G32}(\xi)\right]=\left[C_{G31} \quad C_{G32}.P_2(\xi)\right] \qquad [4.159]$$

De même, on peut définir une « matrice de Ku généralisée » dans le cas de la variante complexe :

$$K_{G3}(\xi)=\left[K_{G31} \quad K_{G32}(\xi)\right]=\left[F_{G31} \quad F_{G32}.R_2(\xi)\right] \qquad [4.160]$$

Nous avons donné au paragraphe 4.3.2.6 les expressions de deux matrices de Park particulières : $Q_{3C}$, associée à la matrice initiale de Clarke (formule [4.43]) et $Q_{3T}$, associée à la matrice normée de Concordia (formule [4.44]). De même, nous avons donné au paragraphe 4.3.2.7 les expressions de matrices de Ku particulières (formule [4.48]) :

– avec $k=1$, il s'agit de $K_{3F}$, associée à la matrice initiale de Fortescue,
– avec $k=1/\sqrt{3}$, il s'agit de $K_{3L}$, associée à la matrice normée de Lyon.

La formule [4.158] permet d'établir les inverses de ces matrices : d'abord les matrices inverses de Park, avec Clarke initiale (voir l'équation [4.161]) et Concordia (voir l'équation [4.162]) :

$$Q_{3I}(\xi)^{-1}=\frac{2}{3}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \cos(\xi) & \cos(\xi-2.\frac{\pi}{3}) & \cos(\xi+2.\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\xi) & -\sin(\xi-2.\frac{\pi}{3}) & -\sin(\xi+2.\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad [4.161]$$

$$Q_{3T}(\xi)^{-1}=\sqrt{\frac{2}{3}}.\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\xi) & \cos(\xi-2.\frac{\pi}{3}) & \cos(\xi+2.\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\xi) & -\sin(\xi-2.\frac{\pi}{3}) & -\sin(\xi+2.\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad [4.162]$$

puis les inverses des matrices de Ku, d'abord avec Fortescue initiale ($K_{3F}$, voir l'équation [4.163]), puis avec Lyon ($K_{3L}$, voir la formule [4.164]) :

$$K_{3F}(\xi)^{-1} = \frac{1}{3} K_{F3}(\xi)^{t*} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\xi} & a.e^{-j\xi} & a^2.e^{-j\xi} \\ e^{j\xi} & a^2.e^{j\xi} & a.e^{j\xi} \end{bmatrix} \quad [4.163]$$

$$K_{3L}(\xi)^{-1} = K_{L3}(\xi)^{t*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\xi} & a.e^{-j\xi} & a^2.e^{-j\xi} \\ e^{j\xi} & a^2.e^{j\xi} & a.e^{j\xi} \end{bmatrix} \quad [4.164]$$

### 4.9.2. *Passage réels-complexes*

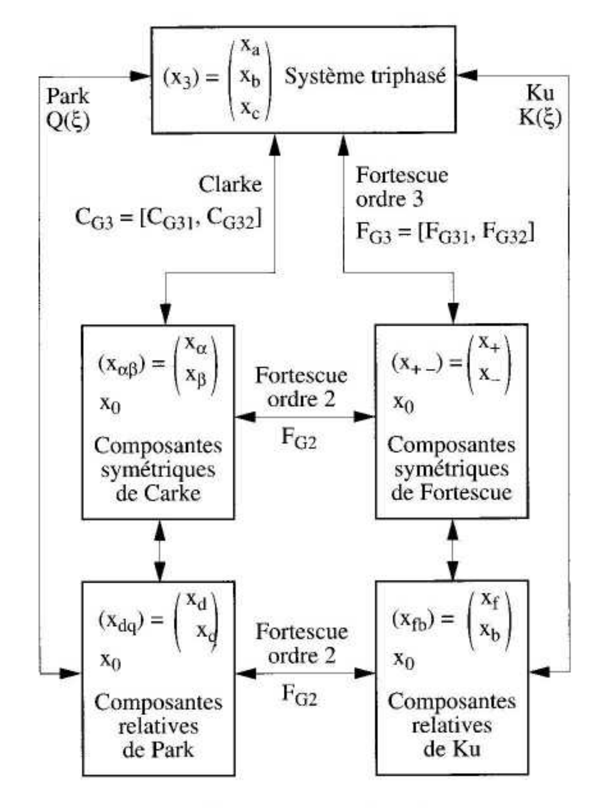



**Figure 4.9.** *Diagramme des relations entre les transformations de Park et de Ku*

On peut travailler avec des transformées réelles seules (avec $C_{G3}$ et $P_2(\xi)$) ou seulement avec des transformées complexes (avec $F_{G3}$ et $R_2(\xi)$). Mais on peut aussi effectuer des transformées triphasé-diphasé en réel, et, ensuite, on peut « passer en complexes », ou *vice versa*. Cela se fait avec les matrices de Fortescue d'ordre 2. On peut effectuer ce passage sur les « composantes symétriques » :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = F_{G2}.\begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \text{ou } x_2 = F_{G2}.x_{+-} \text{ et } x_{+-} = \left(F_{G2}\right)^{-1}.x_2 \qquad [4.165]$$

ou sur les « composantes relatives » :

$$\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = F_{G2}.\begin{pmatrix} x_f \\ x_b \end{pmatrix} \text{ ou } x_{dq} = F_{G2}.x_{fb} \text{ et } x_{+-} = \left(F_{G2}\right)^{-1}.x_2 \qquad [4.166]$$

C'est pour que les propriétés métriques restent valables tout au long de ces transformations que nous avons introduit les « conditions de cohérence » (voir les formules [4.98] et [4.99]).

Le diagramme de la figure 4.9 montre la possibilité des différents trajets possibles pour définir des transformations.

## 4.10. Conclusion

Nous avons fait un exposé sur les principales transformations mathématiques appliquées aux systèmes électriques triphasés.

Ces transformations sont des changements de repères qui s'appuient sur deux propriétés essentielles.

La première concerne les espaces propres : lorsque l'on les étudie, les opérateurs des systèmes triphasés présentent une décomposition immédiate en deux sous-espaces : une direction homopolaire et un plan diphasé orthogonal à la direction homopolaire.

La deuxième propriété concerne le plan diphasé : lorsque l'on s'intéresse aux propriétés associées à la transformation d'énergie dans les machines tournantes, il est intéressant d'opérer des rotations dans le plan diphasé.

Formellement, on obtient deux formes distinctes : une forme réelle et une forme complexe. Ces deux formes sont strictement équivalentes, mais elles permettent

deux variantes principales que l'on peut choisir, à volonté, pour des raisons de convenance.

La forme réelle s'appuie sur la matrice de Clarke et sur la matrice de rotation réelle, et on définit alors la transformation de Park. La forme complexe s'appuie sur la matrice de Fortescue et la matrice de rotation complexe, et on définit alors la transformation de Ku.

Il est très intéressant de décomposer les transformations pour séparer la composante homopolaire d'avec les composantes diphasées. Les propriétés de ces deux types de grandeurs sont très différentes, et leur séparation facilite grandement les études théoriques et les calculs pratiques.

Dans ce contexte, les « phaseurs temporels » s'identifient à la première composante diphasée de la transformation de Fortescue. Ils sont particulièrement intéressants dans les cas particuliers de systèmes équivalents à un système diphasé, mais leur champ d'application se limite à ces mêmes systèmes diphasés. Les approches matricielles et vectorielles sont plus générales.

Ces propriétés ont été appliquées ici à des opérateurs de base qui permettent de modéliser simplement les machines à courant alternatif et les onduleurs classiques. Elles sont d'autant plus utiles lorsque l'on veut modéliser des dispositifs plus complexes : association convertisseurs-machines, systèmes multimachines, et aussi lorsque l'on veut faire des extensions de ces modélisations à des machines qui ne répondent pas aux hypothèses classiques de Park.

## 4.11. Bibliographie

[ADK 57] ADKINS B., *The general Theory of electrical Machines*, Chapman and Hall, Londres, 1957.

[ADK 75] ADKINS B., HARTLEY R.G., *The general theory of alternating current machines*, Chapman and Hall, Londres, 1975.

[AMI 00] AMIN B., *Induction Motors, Analysis and Torque control*, Springer Verlag, Berlin, 2000.

[BAR 82] BARRET P., *Régimes transitoires des machines tournantes*, Eyrolles, Paris, 1982.

[BAS 95] BASILI B., PESKINE C., *Algèbre bibliothèque des Sciences*, Diderot Editeur, Paris, 1995.

[BLA 71] BLASCHKE F., « Das Prinzip der Fieldorientirung, die Grundlagen für die Transvektor », *Regelung von Asynchronmaschinen. Siemens-Zeitschrift*, 45, n° 10, p. 757-760, 1971.

[BON 00] Bonal J., Seguier G., *Entraînements électrique à vitesse variable*, 3 volumes, Technique et Documentation, Lavoisier, 2000.

[BOS 86] Bose B.K., *Power electronics and AC Drives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.

[BOL 92] Boldea I., Nasar S.A., *Vector control of AC Drive*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[BUH 79] Bühler H., *Electronique de puissance et de réglage*, Traité d'Electricité vol. 16, Dunod, Paris, 1979.

[CAR 95] Caron J.-P., Hautier J.P., *Modélisation et commande de la machine asynchrone*, Technip, Paris, 1995.

[CHA 83] Chatelain J., *Machines électriques*, Traité d'Electricité vol. 10, Dunod, Paris, 1983.

[CHA 90] Chauprade R., Milsant F., *Electronique, commande des moteurs à courant alternatif*, Eyrolles, Paris, 1990.

[CON 51] Concordia C., *Synchronous Machines*, Wiley and Son, New York, 1951.

[DEP 98] Depenbrock M., Staudt V., « Hyper Space vectors: A new four-quantity Extension of Space-vector Theory », *ETEP*, vol. 8, n° 4, p. 241-248, juillet-août 1998.

[FOR 90] de Fornel B., « Alimentation des Machines asynchrones, traité de génie électriques », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D3620 et D 3621, 1990.

[GAU 95] Gaude D., « La Conversion d'Energie Electromécanique », *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 89, p. 165-204, juin 1995.

[GRE 96] Grellet G., Clerc G., *Actionneurs électriques, Principes, Modèles, Commandes*, Eyrolles, Paris, 1996.

[GRE 01] Grenier D., Labrique F., Buyse H., Matagne E., *Electromécanique, Convertisseurs d'énergie et actionneurs*, Dunod, Paris, 2001.

[GUD] Gudefin E.J., Correspondance triphasé-diphasé. Transformations fondamentales dans la machine diphaséee, Cours polycopiés, ENSEM, INPL, Nancy.

[HEL 01] Heliodore F., « Modélisation avancée des machines électriques tournantes pour le filtrage actif et l'aide au diagnostic », *Journées nationales d'automatique*, Autrans, 31 janvie-2 février 2001.

[JON 67] Jones C.V., *The unified theory of electrical machines*, Butterworth, Londres, 1967.

[JUF 79] Jufer M., *Electromécaniques*, Traité d'Electricité, Dunod, Paris, 1979.

[JUF 83] Jufer M., *Transducteurs électromécaniques*, Traité d'Electricité vol. 9, EPFL, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1983.

[KOV 59] Kovacs K.P., Racz I., « Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen », Bd I-II, *Verlag der Ungarischen Akademien der Wissenschaften*, Budapest, 1959.

[KRE 93] Kreyszig E., *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley and Sons, New York, 1993.

[KRO 35-38] KRON G., « The application of Tensors to analysis of rotating electrical machinery », part I-part XVIII, *General Electric Revew*, avril 1935-octobre 1938.

[KRO 42] KRON G., « The application of Tensors to analysis of rotating electrical machinery », *General Electric Revew*, 1942.

[KU 52] KU Y.H., « Rotatting-field theory and general analysis of synchronous and induction machines », *IEE, Monogr.*, vol. 99, part IV, n° 4, p. 410-428, 1952.

[LAC 94] LACROUX G., *Les actionneurs électriques pour la robotique et les asservissements*, Tec et Doc, Lavoisier, Paris, 1994.

[LAJ 95] LAJOIE-MAZENC M., VIAROUGE P., « Alimentation des Machines synchrones, traité de génie électriques », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D3630 et D 3631, 1991.

[LAZ 87] LAZAR J., *Park-Vector Theory of Line-Commutated Three-Phase Bridge Converters*, OMIKK Publisher, Budapest, 1987.

[LAZ 90] LAZAR J., *Converter Controlled Induction Motor Drives*, OMIKK Publisher, Budapest, 1990.

[LEO 90] LEONHARD W., *Control of electrical machines*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[LES 81] LESENNE J., NOTELET F., SEGUIER G., *Introduction à l'électrotechnique approfondie*, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1981.

[LOU 96] LOUIS J.-P., BERGMANN C., « Commande numérique des ensembles convertisseurs-machines, Systèmes triphasés : régimes permanents », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D 3642, 1996.

[LOU 97] LOUIS J.-P., BERGMANN C., « Commande numérique des ensembles convertisseurs-machines, Systèmes triphasés : régimes intermédiaires et transitoires », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D 3643 et D 3648, 1997.

[LOU 99] LOUIS J.-P., BERGMANN C., « Commande numérique des machines synchrones », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D 3642, 1999.

[LYO 54] LYON W.V., *Transient analysis of alternating-current machinery*, Wiley and Son, New York, 1954.

[MIL 89] MILLER T.J.E., *Brushless permanent magnet and reluctance motor drives*, Oxford science publications, Oxford, 1989.

[NOV 00] NOVOTNY D.W., LIPO T.A., *Vector control and dynamics of AC Drives*, Oxford Science Publications, Oxford, 2000

[PAR 29] PARK R.H., « Two-reaction theory of synchronous machines », *AIEE Trans.* 48, p. 716-730, 1929.

[PAR 33] PARK R.H., « Two-reaction theory of synchronous machines », *AIEE Trans.* 52, p. 352-355, 1933.

[SCH 85] Mikrorechner-geregelter Asynchron-Stellantrieb, Dissertation, Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 1985.

[SER 93a] SERRANO-IRIBARNEGARAY I., « The modern Space-Phasor Theory. Part I: Its Coherent Formulation and its Advantages for Transient Analysis of Converter-fed AC machines », *ETEP*, vol. 3, n° 2, p. 171-179, mars-avril 1993.

[SER 93b] SERRANO-IRIBARNEGARAY I., « The modern Space-Phasor Theory. Part II: Comparison with the generalised Machine Theory and the Space-vector Theory », *ETEP*, vol. 3, n° 3, p. 213-219, mai-juin 1993.

[SER 95] SERRANO-IRIBARNEGARAY I., « Critical Review of the Scientific Background Underlying the Generalised Machine Theory and Correlation Theorems in the Space-Phasor Theory », *ETEP*, vol. 5, n° 4, p. 247-255, juillet-août 1995.

[SEM 00] SEMAIL E., Outils et méthodologie d'étude des systèmes électriques polyphasés, Généralisation de la méthode des vecteurs d'espace, Thèse de doctorat de l'Université des sciences et technologie de Lille, 30 juin 2000.

[STA 99] STAUDT V., « AC Machine Dynamics described by Space-Vectors Using State-Space Notation », *ETEP*, vol. 9, n° 1, p. 17-25, janvier-février 1999.

[STU 00] STURZER G., SMIGEL E., *Modélisation et commande des moteurs triphasés, commande vectorielle des moteur synchrones, Commande numérique par contrôleur DSP*, Ellipse, Paris, 2000.

[VAS 90] VAS P., Vector control of AC Machines, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[VAS 92] VAS P., *Electrical Machines and Drives*, Oxford Science publications, Oxford, 1992.

[WHI 59] WHITE D.C., WOODSON H.H., *Electromechanical Energy Conversion*, Wiley and Son, New York, 1959.

[redacted]

Chapitre 5

# Modélisation des machines à courant alternatif par les phaseurs

## 5.1. Introduction : usage des phaseurs en électrotechnique

Les phaseurs sont des outils très utilisés pour modéliser les machines à courant alternatif, surtout à pôles lisses, et les onduleurs. Ce succès est dû au fait que cet outil est à la fois simple et puissant. En effet, il permet de généraliser aux régimes transitoires des outils et des propriétés bien connues en régime permanent sinusoïdal (les vecteurs de Fresnel, les nombres complexes, le théorème de Ferraris). Une difficulté apparaît cependant dans leur présentation, car plusieurs points de vue, apparemment différents, coexistent. Cela est dû au fait que l'on peut emprunter deux approches pour modéliser les machines électriques à courant alternatif :

– une approche « physique ». Ce point de vue est « interne » aux machines. La description de base utilise fondamentalement les champs, décrits par les forces magnétomotrices $F$ (ou par la composante normale de l'induction, ce qui est à peu près équivalent, voir le chapitre 3 « Modélisation physique » de cet ouvrage). On peut définir alors un « phaseur spatio-temporel » qui est une fonction du temps et de l'espace décrivant la distribution du champ dans l'entrefer ;

– une approche plus « externe », plus « formelle », plus « mathématique ». La description de base part des équations aux flux dans les machines écrites à l'aide des inductances. La modélisation s'appuie sur les propriétés de linéarité et de symétrie de ces équations. On peut alors définir un « phaseur temporel » qui peut s'appliquer également aux onduleurs.

---

Chapitre rédigé par Jean-Paul LOUIS, Gilles FELD et Eric MONMASSON.

Une autre difficulté vient du fait que les phaseurs sont le plus souvent présentés *sous une forme complexe, alors que l'on peut en donner une version équivalente, avec des vecteurs réels*. En outre, on peut montrer :

– que l'on peut « passer » très aisément de la représentation par des phaseurs spatio-temporels à la représentation par des phaseurs temporels qui contiennent en fait les mêmes informations que les phaseurs spatio-temporels ;

– qu'il y a équivalence complète entre les représentations réelles et les représentations complexes ;

– qu'il y a plusieurs variantes possibles, et toutes légitimes, pour définir les phaseurs qui ont alors des « propriétés métriques » différentes, comme il est montré dans le chapitre 4 « Propriétés vectorielles des systèmes triphasés ». Dans ce chapitre, nous avons choisi de nous limiter à la variante la plus fréquente qui conserve l'amplitude des signaux sinusoïdaux.

## 5.2. Les outils physiques et mathématiques, les hypothèses

### 5.2.1. *Hypothèses physiques, les forces magnétomotrices*

Nous utiliserons la notion de force magnétomotrice (FMM) telle qu'elle a été définie dans le chapitre 3 « Modélisation physique » ; *c'est la différence de potentiel magnétique scalaire entre le rotor et le stator, et nous l'appliquons à des bobinages triphasés symétriquement disposés, soit au stator, soit au rotor* (figure 5.1). La machine a $p$ paires de pôles. Nous appliquons directement les trois hypothèses fondamentales à la base des modélisations utilisées dans cet ouvrage (voir le chapitre 3 de cet ouvrage) :

– *symétrie* : les enroulements triphasés d'une armature sont identiques et simplement décalés dans l'espace de 120° ;

– *linéarité* : les matériaux ne sont pas saturés, et on emploie les concepts de perméance et d'inductance (hypothèse appliquée dans la formule [5.15]) ;

– *premier harmonique* : la distribution des champs est sinusoïdale dans l'entrefer (hypothèse appliquée dans la formule [5.1]). Les trois bobinages sont indicés $a$, $b$ et $c$ ; la machine étant symétrique, les « coefficients constructifs » utilisés pour modéliser la FMM sont égaux :

$$A_a = A_b = A_c = \frac{2}{\pi}.\frac{k_a.N_a}{2.p}$$

où $N_a$ *est le nombre de conducteurs en série dans la phase*, et $k_a$ est le coefficient de bobinage relatif au premier harmonique. Aussi, les FMM des trois bobinages, indicés $a$, $b$ et $c$, au point de l'entrefer $M(\xi)$ repéré par l'angle $\xi$, s'écrivent :

[redacted]

$$
\begin{aligned}
F_a &= A_a . i_a . \cos(p.\xi) \\
F_b &= A_a . i_b . \cos(p.\xi - 2.\pi / 3) \\
F_a &= A_a . i_a . \cos(p.\xi + 2.\pi / 3)
\end{aligned}
\qquad [5.1]
$$

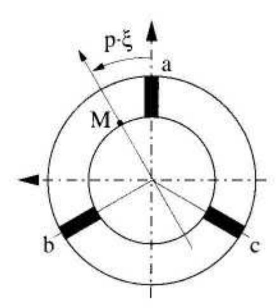



**Figure 5.1.** *Schéma symbolique d'un enroulement triphasé*

### 5.2.2. *Forces magnétomotrices résultantes et outils matriciels réels*

La force magnétomotrice résultante (indicée $t$, comme « totale ») a pour définition $F_t = F_a + F_b + F_c$, et on peut l'écrire *sous la forme d'un produit scalaire avec des notations matricielles* :

$$F_t = A_a . \left( \cos(p.\xi) \quad \cos(p.\xi - 2.\pi / 3) \quad \cos(p.\xi + 2.\pi / 3) \right) . \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \qquad [5.2]$$

On introduit alors des outils matriciels réels : les « sous-matrices de Clarke » $C_{31}$ et $C_{32}$, ainsi que la matrice de rotation réelle $P(\xi)$ :

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & +\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \text{ et } P(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(\xi) & -\sin(\xi) \\ \sin(\xi) & \cos(\xi) \end{bmatrix} \qquad [5.3]$$

Nous verrons (formule [5.23]) que $C_{31}$ et $C_{32}$ contiennent les colonnes de la « matrice initiale de Clarke », notée $C_3$ ou $C_{3I}$. On doit connaître les propriétés d'inversion de ces matrices. Celles-ci sont données par les formules suivantes :

$$C_{31}{}^{t}.C_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \qquad [5.4]$$

$$C_{32}{}^{t}.C_{32} = \frac{3}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [5.5]$$

$$C_{31}{}^{t}.C_{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [5.6]$$

$$P(\xi)^{-1} = P(-\xi) = P(\xi)^{t} \qquad [5.7]$$

L'usage des matrices $C_{32}$ et $P(\xi)$ permet de donner une forme « factorisée » aux systèmes triphasés, forme que nous utiliserons fréquemment par la suite :

$$\begin{bmatrix} \cos(\xi) \\ \cos(\xi - 2.\pi/3) \\ \cos(\xi + 2.\pi/3) \end{bmatrix} = C_{32}.P(\xi).\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [5.8]$$

### 5.2.3. *Outils matriciels complexes*

La forme factorisée va également nous servir à introduire des outils matriciels complexes.

En effet, la matrice de rotation $P(\xi)$ a des valeurs propres complexes conjuguées, $e^{j.\xi}$ et $e^{-j.\xi}$, et une matrice de changement de repère est la « matrice classique de Fortescue d'ordre 2 », notée $F_2$. On note $R(\xi)$ la matrice diagonale contenant les valeurs propres et qui est donc la « matrice de rotation complexe ». On peut écrire :

$$P(\xi) = F_2.R(\xi).F_2{}^{-1} \qquad [5.9]$$

avec :

$$R(\xi) = \begin{bmatrix} e^{j.\xi} & 0 \\ 0 & e^{-j.\xi} \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \text{ et } F_2{}^{-1} = \frac{1}{2}.F_2{}^{t*} = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \qquad [5.10]$$

La factorisation [5.8] peut être réécrite avec des matrices complexes :

$$\begin{bmatrix} \cos(\xi) \\ \cos(\xi - 2.\pi/3) \\ \cos(\xi + 2.\pi/3) \end{bmatrix} = C_{32}.F_2.R(\xi).\frac{1}{2}F_2^{t*}.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [5.11]$$

L'expression [5.11] peut être réarrangée pour donner :

$$\begin{bmatrix} \cos(\xi) \\ \cos(\xi - 2.\pi/3) \\ \cos(\xi + 2.\pi/3) \end{bmatrix} = F_{32}.R(\xi).\frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = F_{32}.\frac{1}{2}.\begin{bmatrix} e^{j.\xi} \\ e^{-j.\xi} \end{bmatrix} \qquad [5.12]$$

où la matrice $F_{32}$ (voir formule [5.13]) contient les deuxième et troisième colonnes de la « matrice classique de Fortescue d'ordre 3 », définie par l'équation [5.38]. Nous avons la relation :

$$F_{32} = C_{32}.F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \qquad [5.13]$$

où $a$ et $a^2$ sont des racines cubiques de l'unité, qui vérifient des propriétés comme : $a^3 = 1$, $a^4 = a$ et $1 + a + a^2 = 0$, soit :

$$a = -\frac{1}{2} + j.\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } a^2 = a^* = \frac{1}{a} = -\frac{1}{2} - j.\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad [5.14]$$

### 5.2.4. *Hypothèse de linéarité, perméance superficielle et induction dans l'entrefer*

L'hypothèse de linéarité permet d'écrire que dans l'entrefer la *composante normale de l'induction* (notée $B$ dans la suite) est proportionnelle à la force magnétomotrice (voir le chapitre 3 « Modélisation physique », ainsi que [CHA 83, GRE 01, LES 81]), et nous introduisons la perméance superficielle $p$ qui permet d'écrire :

$$B = p.F \qquad [5.15]$$

## 5.3. Une définition des phaseurs temporels, équivalence diphasé-triphasé, cas réel

Nous reprenons l'exemple du système triphasé de bobinages symétriques définis au paragraphe précédent, et nous observons que la force magnétomotrice totale peut être écrite sous la forme factorisée suivante (propriété déduite des formules [5.2] et [5.8]) :

$$F_{tabc} = A_a.(1 \quad 0).P(-\xi).C_{32}{}^t.(i_3) \qquad [5.16]$$

où $(i_3)$ est le vecteur des courants triphasés $(i_3) = (i_a \quad i_b \quad i_c)^t$. Nous posons alors le problème suivant : la force magnétomotrice $F_t$ créée par un enroulement triphasé, peut-elle être créée par un enroulement diphasé symétrique comme celui défini par la figure 5.2.

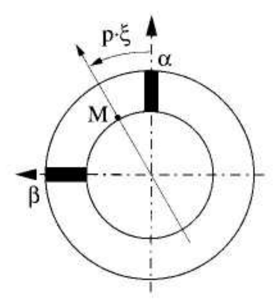



**Figure 5.2.** *Schéma symbolique d'un enroulement diphasé*

Les enroulements diphasés sont indicés $\alpha$ et $\beta$ ; la machine est symétrique et les coefficients des FMM sont égaux :

$$A_\alpha = A_\beta = \frac{2}{\pi}.\frac{k_\alpha.N_\alpha}{2.p}$$

(les coefficients $k_\alpha$ et $N_\alpha$ ont des significations analogues à celles vues au paragraphe 5.2.1) et les forces magnétomotrices qu'ils créent ont pour expression :

$$\begin{aligned} F_\alpha &= A_\alpha.i_\alpha.\cos(p.\xi) \\ F_\beta &= A_\alpha.i_\beta.\sin(p.\xi) \end{aligned} \qquad [5.17]$$

Et la FMM totale créée par l'enroulement diphasé peut être écrite avec $(i_2)$ qui est le vecteur des courants triphasés $(i_2) = (i_\alpha \quad i_\beta)^t$ :

$$F_{t\alpha\beta} = A_\alpha.(1 \quad 0).P(-\xi).(i_2) \qquad [5.18]$$

La question est donc la suivante : à quelle(s) condition(s) les FMM créées par les enroulements triphasés et diphasés sont elles identiques, $F_{tabc} = F_{t\alpha\beta}$ ? La comparaison de [5.16] et [5.18] montrent :

$$A_a.C_{32}{}^t.(i_3) = A_\alpha.(i_2) \qquad [5.19]$$

Il faut donc :

$$(i_2) = \frac{A_a}{A_\alpha}.C_{32}{}^t.(i_3)$$

On pourrait poser[1] : $(i_2) = k_{C2}.C_{32}{}^t.(i_3)$ où $k_{C2}$ serait arbitraire. En pratique, de nombreux auteurs choisissent la valeur numérique $k_{C2} = 2/3$ dont nous verrons qu'elle conserve la valeur numérique de l'amplitude des variables sinusoïdales. Ce choix est pratique lorsque l'on s'intéresse à un seul type de variables (ici, les courants), mais ce choix, nous le verrons également, ne conserve pas l'expression de la puissance. Nous définissons alors la transformation triphasé-diphasé sur des variables quelconques (courants, tensions, flux) :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.C_{32}{}^t.\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & +\sqrt{3}/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

ou :

$$(x_2) = \frac{2}{3}.C_{32}{}^t.(x_3) \qquad [5.20]$$

Alors les enroulements équivalents ont des bobinages qui vérifient :

$$A_\alpha = \frac{3}{2}A_a \Rightarrow k_\alpha.N_\alpha = \frac{3}{2}.k_a.N_a \qquad [5.21]$$

La transformation [5.20] définit la *forme vectorielle réelle du phaseur temporel.*

---

1. Avec des notations compatibles avec celles du chapitre 4, « Propriétés vectorielles des systèmes triphasés ».

## 5.4. Inversion des formules, composante homopolaire, reconstitution des grandeurs triphasées

Il est évidemment nécessaire de pouvoir reconstituer les signaux triphasés $\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \end{pmatrix}^t$ à partir de la connaissance du phaseur. Comme celui-ci ne contient que deux informations $\begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta \end{pmatrix}^t$, l'équations [5.20] ne peut être inversée. C'est pourquoi on définit, parallèlement au phaseur, une « composante homopolaire » par :

$$x_0 = \frac{1}{3}.\left(x_a + x_b + x_c\right) \text{ ou } x_0 = \frac{1}{3}.C_{31}{}^t.\left(x_3\right) \qquad [5.22]$$

Alors, l'inversion simultanée des formules [5.20] et [5.22] donne :

$$\left(x_3\right) = C_3.\begin{pmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix}, \text{avec } C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & +\sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \qquad [5.23]$$

où la matrice $C_3$ est la « matrice initiale de Clarke », constituée des sous-matrices $C_{31}$ et $C_{32}$ *qui contiennent ses colonnes*. On voit que ces colonnes définissent des vecteurs tous orthogonaux entre eux. On observe que la définition classique des *phaseurs réels* (formules [5.20] et [5.22]) correspond à l'inversion de la matrice initiale de Clarke :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = C_3^{-1}.\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \text{ avec } C_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}.C_{31}{}^t \\ \frac{2}{3}.C_{32}{}^t \end{bmatrix} \qquad [5.24]$$

Dans la suite, il sera pratique d'écrire la reconstitution des grandeurs triphasées sous *forme décomposée* :

$$\left(x_3\right) = C_{31}.x_0 + C_{32}.\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = C_{31}.x_0 + C_{32}.\left(x_2\right) \qquad [5.25]$$

## 5.5. Formes cartésiennes et polaires : phaseur spatio-temporel sous forme réelle

La forme du phaseur [5.20] est un vecteur réel en représentation cartésienne. Pour faire apparaître clairement certains propriétés très importantes à l'aide des

phaseurs, il est très pratique d'adopter la forme « polaire », avec l'amplitude $i$ et la phase $\upsilon$, soit :

$$(i_2) = i.\begin{pmatrix} \cos(\upsilon) \\ \sin(\upsilon) \end{pmatrix} \text{ ou } (i_2) = i.P(\upsilon)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [5.26]$$

Cette définition, écrite en [5.26] pour les courants, sera également appliquée pour les autres variables, tensions et flux. Alors, la FMM peut être réécrite :

$$F_{t\alpha\beta}(\xi,\theta) = A_\alpha.i.(1 \quad 0).P(-\xi+\upsilon).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_\alpha.i.\cos(-\xi+\upsilon) \quad [5.27]$$

Sous cette forme, on observe bien que la FMM a une distribution sinusoïdale et on peut voir qu'elle est complètement connue si l'on connaît « l'axe du champ ». Celui-ci est défini par la direction $\xi = \upsilon$ où sa valeur est maximale, et par cette amplitude maximale qui vaut $F_{t\alpha\beta m} = A_{\alpha\beta}.i$. Nous appelons cette expression donnant la FMM *phaseur spatio-temporel sous forme réelle*.

RÈGLE.– La connaissance du courant, par son amplitude $i$ et sa phase $\upsilon$, suffit à définir le champ $F_{t\alpha\beta m}$. La figure 5.3 met en parallèle une représentation géométrique du champ et la représentation du vecteur associé au courant. *Le phaseur temporel contient donc bien les mêmes informations que le phaseur spatio-temporel* (si l'on admet connus les paramètres constructifs $A_\alpha$ et $\omega$ et l'hypothèse du premier harmonique, voir le chapitre 3 « Modélisation physique »).

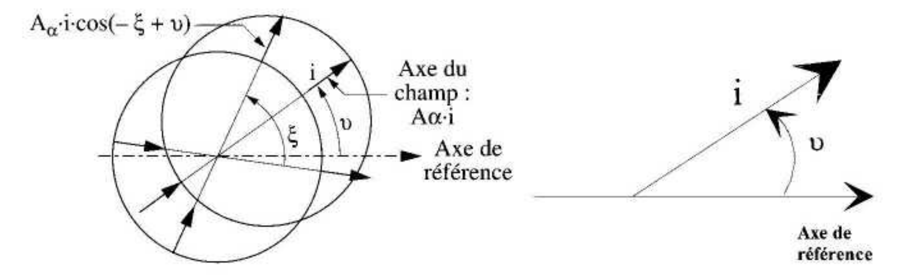



**Figure 5.3.** *Parallèle entre la représentation géométrique du champ et la représentation du phaseur vectoriel associé au courant*

Pour la suite, comme les distributions de champ sont identiques, on notera :

$$F_{t\alpha\beta} = F_{tabc} = F_t$$

## 5.6. Une définition complexe des phaseurs temporels et spatio-temporels

Il est classique en modélisation de systèmes électriques, lorsqu'une grandeurs est décrite par une forme réelle comme [5.26] (qui elle-même est équivalente à l'équation [5.20]) de l'associer à une représentation complexe [5.28]. On définit alors le *phaseur temporel complexe* associé au courant par :

$$\underline{i} = i.e^{j.\upsilon} \qquad [5.28]$$

Cette définition pourra être étendue, évidemment, à la tension et au flux. On peut également associer à la fonction spatio-temporelle réelle [5.27] la fonction complexe spatio-temporelle [5.29] :

$$\underline{F}_t = A_\alpha .i.e^{j.(-\xi+\upsilon)} \qquad [5.29]$$

ou encore :

$$\underline{F}_t = A_\alpha .e^{-j.\xi}.\underline{i} \qquad [5.30]$$

qui peut être illustré par la même figure 5.3. On peut inverser ces relations :

$$F_t(\xi,\theta) = \mathrm{Re}(\underline{F}_t) = \frac{1}{2}.\left(\underline{F}_t(\xi,\theta) + \underline{F}_t^*(\xi,\theta)\right) \qquad [5.31]$$

$$\begin{cases} i_\alpha \\ i_\beta \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{Re}(\underline{i}) \\ \mathrm{Im}(\underline{i}) \end{cases} = \begin{cases} i.\cos(\upsilon) \\ i.\sin(\upsilon) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}.\left(\underline{i} + \underline{i}^*\right) \\ \dfrac{1}{2.j}.\left(\underline{i} - \underline{i}^*\right) \end{cases} \qquad [5.32]$$

On observe qu'il est naturel d'utiliser les quantités conjuguées des grandeurs complexes. Ce qui a été écrit pour les courants peut être appliqué aux autres variables, tensions et flux. On peut écrire les relations directes et inverses entre $(x_2)$ et $\underline{x}$ sous les formes matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} \qquad [5.33]$$

On reconnaît dans la formule [5.33] des matrices qui sont proportionnelles à la « matrice classique de Fortescue d'ordre 2 » $F_2$ et à son inverse $F_2^{-1}$ qui ont été

définies en [5.10]. Il s'agit de la « matrices initiale de Fortescue d'ordre 2 », notée $F_{2I}$ et de son inverse. On peut les définir :

$$F_{2I} = \frac{1}{2}.F_2 = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \text{ et } F_{2I}^{-1} = F_2^{t*} = 2.F_{2I}^{t*} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \qquad [5.34]$$

Alors la formule [5.33] peut être réécrite sous forme compacte :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.F_2.\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = F_{2I}.\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} \qquad [5.35]$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = F_{2I}^{-1}.\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = F_2^{t*}.\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = 2.F_{2I}^{t*}.\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} \qquad [5.36]$$

## 5.7. Détermination directe du phaseur complexe à partir des grandeurs temporelles triphasées

Nous avons donné une définition des phaseurs à partir de considérations physiques naturellement définies sur des grandeurs réelles, définition qui débouchait sur les formules de transformation [5.20] et [5.22]. Puis, nous leur avons associé un phaseur complexe défini par la formule de transformation [5.33]. On peut en déduire un calcul direct du phaseur complexe à partir des grandeurs triphasées. En effet, on a les deux relations suivantes [5.20] et [5.36] :

$$(x_2) = \frac{2}{3}.C_{32}^t.(x_3)$$

et :

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = F_2^{t*}.\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix}$$

et la fusion de ces deux équations donne :

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = F_2^{t*}.\frac{2}{3}.C_{32}^t.(x_3) \qquad [5.37]$$

On s'intéresse alors au produit $F_2^{t*}.C_{32}^{\,t}$ qui vaut $F_2^{t*}.C_{32}^{\,t} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$. On reconnaît la matrice transposée conjuguée de $F_{32}$ définie par l'équation [5.13]. On définit également une sous-matrice $F_{31}$ par $F_{31} = C_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$. Avec ces sous-matrices, on constitue la « matrice classique de Fortescue d'ordre 3 » définie par :

$$F_3 = \begin{bmatrix} F_{31} & F_{32} \end{bmatrix}, \text{ avec } F_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \qquad [5.38]$$

et son inverse est :

$$F_3^{-1} = \frac{1}{3}.F_3^{t*}, \text{ ou } F_3^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \qquad [5.39]$$

Dans ces conditions, la définition directe du phaseur complexe à partir des grandeurs triphasées [5.37] peut être écrite avec $F_{32I}$ (2[e] et 3[e] colonnes de la matrice initiale de Fortescue) ou avec $F_{32}$ (2[e] et 3[e] colonnes de la matrice classique de Fortescue) :

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.F_{32}^{\,t*}.(x_3) = F_{32I}^{\,t*}.(x_3) = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}.(x_3) \qquad [5.40]$$

Le phaseur $\underline{x}$ peut être directement écrit avec la 1[re] ligne de $F_{32I}^{\,t*}$ :

$$\underline{x} = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix}.(x_3) = \frac{2}{3}.\left(x_a + a.x_b + a^2.x_c\right) \qquad [5.41]$$

et la composante homopolaire, déjà définie par la formule [5.22] peut être réécrite avec $F_{31}$ (1[re] colonne de la matrice classique) ou $F_{31I}$ (1[re] colonne de la matrice initiale) :

$$x_0 = \frac{1}{3}.F_{31}^{\,t}.(x_3) = F_{31I}^{\,t}.(x_3) = \frac{1}{3}.\left(x_a + x_b + x_c\right) \qquad [5.42]$$

## 5.8. Application au régime permanent

Les phaseurs temporels (réels ou complexes) sont une extension en régime permanent des « vecteurs de Fresnel » classiquement utilisés pour représenter en électricité générale les grandeurs électriques en régime permanent sinusoïdal. Le lecteur doit prêter attention au fait que le phaseur présente, par rapport au vecteur de Fresnel, plusieurs types d'extensions :

– il s'agit d'un vecteur défini en *régime transitoire quelconque* ;

– il représente complètement la machine triphasée, tandis que les vecteurs de Fresnel sont habituellement associés à des grandeurs monophasées et qu'il en faut en fait trois pour représenter un système triphasé. Comme les trois vecteurs (soit des tensions, soit des flux, soit des courants) sont identiques (et déphasés de 120°), on n'en représente souvent qu'un seul, par facilité, mais l'on tient compte des deux autres dans les expressions de la puissance en introduisant un coefficient 3. Ce coefficient ne doit pas être introduit ici, car le phaseur contient en lui-même les propriétés complètes du système triphasé.

L'expression d'un système triphasé de tensions et courants électriques peut s'écrire ainsi, avec les amplitude efficace $V$ et $I$, la pulsation $\omega$ et le déphasage $-\varphi$ du courant (nous utilisons la forme factorisée [5.8]) :

$$(v_3)=\sqrt{2}.V.\begin{bmatrix}\cos(\omega.t)\\ \cos(\omega.t-2.\pi/3)\\ \cos(\omega.t+2.\pi/3)\end{bmatrix}=\sqrt{2}.V.C_{32}.P(\omega.t).\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad [5.43]$$

$$(i_3)=\sqrt{2}.I.\begin{bmatrix}\cos(\omega.t-\varphi)\\ \cos(\omega.t-2.\pi/3-\varphi)\\ \cos(\omega.t+2.\pi/3-\varphi)\end{bmatrix}=\sqrt{2}.I.C_{32}.P(\omega.t-\varphi).\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad [5.44]$$

On trouve aisément que les composantes homopolaires de ces grandeurs triphasées sont nulles :

$$v_0=0 \text{ et } i_0=0 \qquad [5.45]$$

La définition du phaseur réel (équation [5.20]) et la propriété d'inversion donnée par [5.5] donnent aisément les formes réelles, sous formes polaires et cartésiennes des phaseurs associés aux tensions et aux courants :

$$(v_2)=V.\sqrt{2}.P(\omega.t).\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=V.\sqrt{2}.\begin{bmatrix}\cos(\omega.t)\\ \sin(\omega.t)\end{bmatrix} \qquad [5.46]$$

$$(i_2) = I.\sqrt{2}.P(\omega.t-\varphi).\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = V.\sqrt{2}.\begin{bmatrix}\cos(\omega.t-\varphi)\\ \sin(\omega.t-\varphi)\end{bmatrix} \qquad [5.47]$$

On observe que les expressions des phaseurs [5.46] et [5.47] conservent les expressions des amplitudes. Les formes complexes des phaseurs tension et courant sont définies par [5.28] avec $v = V\sqrt{2}$ et $\upsilon = \omega.t$ pour la tension, et : $i = I\sqrt{2}$ et $\upsilon = \omega.t - \varphi$ pour le courant :

$$\underline{v} = \sqrt{2}.V.e^{j.\omega.t} \text{ et } \underline{i} = \sqrt{2}.I.e^{j.(\omega.t-\varphi)} \qquad [5.48]$$

On peut alors en déduire le phaseur spatio-temporel de la force magnétomotrice, d'abord sous forme réelle, à partir de la formule [5.27] :

$$\begin{aligned} F_t &= A_\alpha.I.\sqrt{2}.(1 \quad 0).P(-\xi+\omega.t-\varphi).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= A_\alpha.I.\sqrt{2}.\cos(\xi-\omega.t+\varphi) \end{aligned} \qquad [5.49]$$

Comme $k_\alpha.N_\alpha = \frac{3}{2}.k_a.N_a$ (voir la formule [5.21]), on retrouve le classique *théorème de Ferraris* qui définit les « champs tournants », dont l'amplitude est $\frac{3}{2}.k_a.N_a.I.\sqrt{2}$ et la vitesse de rotation est la vitesse de synchronisme $d\xi / dt = \omega$. La forme complexe est déduite de [5.29] :

$$\underline{F_t} = A_{\alpha\beta}.I.\sqrt{2}.e^{j.(-\xi+\omega.t-\varphi)} = \frac{3}{2}.k_a.N_a.I.\sqrt{2}.e^{j.(-\xi+\omega.t-\varphi)} \qquad [5.50]$$

que l'on peut aussi écrire, avec le *vecteur complexe traditionnel* $\underline{I} = I.e^{-j.\varphi}$ :

$$\underline{F_t} = A_{\alpha\beta}.\sqrt{2}.\underline{I}.e^{j.(-\xi+\omega.t)} = \frac{3}{2}.k_a.N_a.\sqrt{2}.\underline{I}.e^{j.(-\xi+\omega.t)} \qquad [5.51]$$

## 5.9. Expressions de la puissance

La puissance électrique instantanée a pour définition :

$$p = (v_a \quad v_b \quad v_c).(i_a \quad i_b \quad i_c)^t = (v_3)^t.(i_3) \qquad [5.52]$$

L'écriture sous forme matricielle décomposée (voir la formule [5.25]) est :

$$p=(v_3)^t.(i_3)=\left[C_{31}.v_0+C_{32}.(v_2)\right]^t.\left[C_{31}.i_0+C_{32}.(i_2)\right] \quad [5.53]$$

### 5.9.1. *Forme réelle*

Le développement de l'équation [5.53], en tenant compte des propriétés d'inversion (formules [5.4] à [5.6]) est :

$$p=3.v_0.i_0+\frac{3}{2}.(v_2)^t.(i_2)=3.v_0.i_0+\frac{3}{2}.\left(v_\alpha.i_\alpha+v_\beta.i_\beta\right) \quad [5.54]$$

La définition usuelle des phaseurs (voir les équations [5.20] et [5.22]) introduit les coefficients 3 et 3/2 dans l'expression de la puissance.

En régime permanent sinusoïdal, la formule [5.54] donne :

$$\begin{aligned}p&=\frac{3}{2}.(v_2)^t.(i_2)=\frac{3}{2}.V.\sqrt{2}.I.\sqrt{2}.\left[\cos(\omega.t)\quad \sin(\omega.t)\right].\begin{bmatrix}\cos(\omega.t-\varphi)\\ \sin(\omega.t-\varphi)\end{bmatrix}\\ &=3.V.I.\cos(\varphi)\end{aligned} \quad [5.55]$$

On retrouve bien le résultat classique.

### 5.9.2. *Forme complexe*

Pour utiliser les complexes pour écrire la puissance, il faut utiliser les formules [5.33] et [5.54] :

$$\begin{aligned}p&=3.v_0.i_0+\frac{3}{2}.\left\{\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ -j & j\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}\underline{v}\\ \underline{v}^*\end{pmatrix}\right\}^{t*}.\left\{\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ -j & j\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}\underline{i}\\ \underline{i}^*\end{pmatrix}\right\}\\ &=3.v_0.i_0+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}\underline{v}^* & \underline{v}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\underline{i}\\ \underline{i}^*\end{pmatrix}=3.v_0.i_0+\frac{3}{2}.\mathrm{Re}\left(\underline{v}.\underline{i}^*\right)\end{aligned} \quad [5.56]$$

Nous pouvons retrouver aisément le résultat en régime permanent [5.55] à l'aide des équations [5.56] et [5.48].

## 5.10. Modélisation des machines électriques à pôles lisses par les phaseurs, courant magnétisant et champ total

En pratique, c'est surtout pour les machines à pôles lisses que les phaseurs ont été très utilisés. Celles-ci sont définies par une perméance superficielle constante, $p_0 = \mu_0 / e$, où $e$ est l'épaisseur de l'entrefer. Ce sont tout particulièrement les machines asynchrones qui en ont bénéficié. Nous donnerons cependant quelques résultats concernant les machines synchrones (à pôles lisses). La figure 5.4 donne le schéma symbolique d'une machine triphasée au stator et triphasée au rotor. Les paramètres constructifs de la machine sont $k_s$ et $N_s$ au stator et $k_r$ et $N_r$ au rotor. On posera donc :

$$A_a = \frac{2}{\pi}.\frac{k_s.N_s}{2.p} \text{ et } A_A = \frac{2}{\pi}.\frac{k_r.N_r}{2.p}$$

Le rotor a tourné d'un angle mécanique $\theta$ par rapport au stator, et d'angle électrique $p.\theta$.

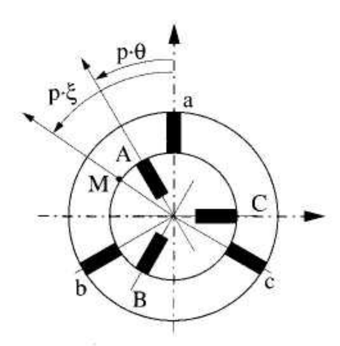



**Figure 5.4.** *Machine triphasée au stator et au rotor*

### 5.10.1. *Phaseurs temporels et spatio-temporels au stator et au rotor*

Les formules que nous avons établies dans les paragraphes précédents s'appliquent directement aux grandeurs (tensions, courants, champ, puissance) relatives au stator ; il suffit d'y ajouter l'indice $s$. Nous rappelons que pour les grandeurs triphasées matricielles, nous pouvons omettre l'indice $s$ et mettre les indices en minuscule. Pour l'enroulement diphasé équivalent, le coefficient constructif est noté $A_{s\alpha}$. Nous avons :

$$\begin{pmatrix} x_{s\alpha} \\ x_{s\beta} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.C_{32}{}^{t}.\begin{pmatrix} x_{sa} \\ x_{sb} \\ x_{sc} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.C_{32}{}^{t}.\begin{pmatrix} x_{a} \\ x_{b} \\ x_{c} \end{pmatrix} \text{ ou : } (x_{s2}) = \frac{2}{3}.C_{32}{}^{t}.(x_{s3}) \qquad [5.57]$$

$$F_{st\alpha\beta} = A_{s\alpha}.i_s.(1 \quad 0).P(-p.\xi + \upsilon_s).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\alpha}.i_s.\cos(-p.\xi + \upsilon_s) \qquad [5.58]$$

$$(i_{s2}) = \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} = i_s.\begin{pmatrix} \cos(\upsilon_s) \\ \sin(\upsilon_s) \end{pmatrix} \text{ ou } \underline{i}_s = i_s.e^{j.\upsilon_s} \qquad [5.59]$$

$$\underline{F}_{st} = A_{s\alpha}.i_s.e^{j.(-p.\xi+\upsilon_s)}{}_t = A_{s\alpha}.e^{-j.p.\xi}.\underline{i}_s \qquad [5.60]$$

Pour le rotor, nous utilisons l'indice $r$. Pour les grandeurs triphasées, nous pouvons omettre l'indice $r$, car nous utilisons des majuscules ; par exemple, $i_{ra} = i_A$. Les champs créés par le rotor s'écrivent au point $M(p.\xi)$ :

$$\begin{aligned} F_{ra} &= F_A = A_A.i_A.\cos(p.\xi - p.\theta) \\ F_{rb} &= F_B = A_A.i_B.\cos(p.\xi - 2.\pi/3 - p.\theta) \\ F_{rc} &= F_C = A_A.i_C.\cos(p.\xi + 2.\pi/3 - p.\theta) \end{aligned} \qquad [5.61]$$

Un calcul analogue à celui utilisé pour les champs statoriques (voir les formules [5.2] à [5.34]) conduit aux résultats suivants. D'abord les expressions du phaseur temporel associé aux variables rotoriques, comme le courant :

$$(i_{r\alpha\beta}) = \frac{2}{3}.C_{32}{}^{t}.(i_A \quad i_B \quad i_C)^t \qquad [5.62]$$

et :

$$\begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} = i_r.\begin{pmatrix} \cos(\upsilon_r) \\ \sin(\upsilon_r) \end{pmatrix} \text{ ou } \underline{i}_r = i_r.e^{j.\upsilon_r} \qquad [5.63]$$

Les autres grandeurs (tensions, flux) auront des définitions analogues. La force magnétomotrice résultante créée par le rotor a pour expression (le coefficient constructif des enroulements du rotor est noté $A_A$) :

$$F_{tABC} = \frac{3}{2}.A_A.\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.P(p.\xi - p.\theta).C_{32}{}^t.\begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} \qquad [5.64]$$

Avec la formule [5.62], on peut définir un enroulement rotorique diphasé équivalent, de coefficient constructif $A_{r\alpha}$ :

$$F_{tABC} = A_{r\alpha}.\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.P(p.\xi - p.\theta).\begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} \text{ avec } A_{r\alpha} = \frac{3}{2}.A_A \qquad [5.65]$$

et une forme réelle du phaseur spatio-temporel est :

$$\begin{aligned} F_{rt} &= A_{r\alpha}.i_r.\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.P\left(-p.\xi + \upsilon_r + p.\theta\right).\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \\ &= A_{r\alpha}.i_r.\cos\left(-p.\xi + \upsilon_r + p.\theta\right) \end{aligned} \qquad [5.66]$$

La forme complexe du phaseur spatio-temporel est :

$$\underline{F}_{rt} = A_{r\alpha}.i_r.e^{j.(-p.\xi + \upsilon_r + p.\theta)} = A_{r\alpha}.e^{j.(p.\theta - p.\xi)}.\underline{i}_r \qquad [5.67]$$

### 5.10.2. *Champ total et courant magnétisant*

#### 5.10.2.1. *Champ total temporel*

Le champ total au point $M$ d'entrefer, dû à la superposition du champ créé par le stator et du champ créé par le rotor, a l'expression suivante :

$$F_t = F_{st} + F_{rt} = A_{s\alpha}.i_s.\cos(-p.\xi + \upsilon_s) + A_{r\alpha}.i_r.\cos(-p.\xi + \upsilon_r + p.\theta) \qquad [5.68]$$

où, sous forme complexe :

$$\begin{aligned} \underline{F}_t &= \underline{F}_{st} + \underline{F}_{rt} = A_{s\alpha}.i_s.e^{j.(-p.\xi + \upsilon_s)} + A_{r\alpha}.i_r.^{j.(-p.\xi + \upsilon_r + p.\theta)} \\ &= A_{s\alpha}.e^{-j.p.\xi}.\underline{i}_s.+ A_{r\alpha}.^{j.(-p.\xi + p.\theta)}.\underline{i}_r \end{aligned} \qquad [5.69]$$

#### 5.10.2.2. *Champ total et courant magnétisant en régime permanent*

En régime permanent, il est classique d'écrire ces relations, avec $\upsilon_s = \omega_1.t - \varphi_1$ et $\upsilon_r = \omega_2.t - \varphi_2$, où $\omega_1$ et $\omega_2$ sont les pulsations statorique et rotorique. La vitesse

est définie par $\Omega = d\theta / dt$. Cette vitesse et la position vérifient (propriétés classiques des machines asynchrones en régime permanent) :

$$\omega_1 = p.\Omega + \omega_2 \text{ et } p.\theta = p.\theta_0 + \left(\omega_1 - \omega_2\right).t \qquad [5.70]$$

Alors, les courants ont pour phaseurs temporels associés :

$$\begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} = i_s.\begin{pmatrix} \cos\left(\omega_1.t - \varphi_1\right) \\ \sin\left(\omega_1.t - \varphi_1\right) \end{pmatrix} \text{ ou } \underline{i}_s = \sqrt{2}.I_s.e^{j.(\omega_1.t - \varphi_1)} \qquad [5.71]$$

et :

$$\begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.I_r.\begin{pmatrix} \cos\left(\omega_2.t - \varphi_2\right) \\ \sin\left(\omega_2.t - \varphi_2\right) \end{pmatrix} \text{ ou } \underline{i}_r = \sqrt{2}.I_r.e^{j.(\omega_2.t - \varphi_2)} \qquad [5.72]$$

et les champs ont pour phaseur spatio-temporel :

$$\begin{aligned} F_t &= F_{st} + F_{rt} = A_{s\alpha}.\sqrt{2}.I_s.\cos(-p.\xi + \omega_1.t - \varphi_1) \\ &+ A_{r\alpha}.\sqrt{2}.I_r.\cos(-p.\xi + \omega_2.t - \varphi_{2_r} + p.\theta) \end{aligned} \qquad [5.73]$$

Grâce aux propriétés [5.70], ( $p.\theta = p.\theta_0 + \left(\omega_1 - \omega_2\right).t$ ), on observe que les phases des deux termes qui interviennent dans l'équation [5.73] ont la même pulsation :

$$\begin{aligned} F_t &= F_{st} + F_{rt} = A_{s\alpha}.\sqrt{2}.I_s.\cos(-p.\xi + \omega_1.t - \varphi_1) \\ &+ A_{r\alpha}.\sqrt{2}.I_r.\cos(-p.\xi + \omega_1.t - \varphi_{2_r} + p.\theta_0 +) \end{aligned} \qquad [5.74]$$

ou, sous forme complexe :

$$\begin{aligned} \underline{F}_t &= \underline{F}_{st} + \underline{F}_{rt} = A_{s\alpha}.\sqrt{2}.I_s.e^{j.(-p.\xi + \omega_1.t - \varphi_1)} \\ &+ A_{r\alpha}.\sqrt{2}.I_r.^{j.(-p.\xi + \omega_1.t - \varphi_2 + p.\theta_0)} \end{aligned} \qquad [5.75]$$

En régime permanent, il est classique de définir un « courant magnétisant » ; cela se pratique d'habitude sur des expressions complexes comme la formule [5.75], sur lesquelles on pose :

$$\underline{F}_t = \underline{F}_{st} + \underline{F}_{rt} = A_{s\alpha\beta}.\sqrt{2}.I_{\mu s}.e^{j.(-p.\xi + \omega_1.t - \varphi_\mu)} \qquad [5.76]$$

Le courant magnétisant résulte donc d'un changement de variable qui permet d'écrire une grandeur magnétique (ici, la force magnétomotrice) à l'aide d'une grandeur fictive ayant la dimension d'un courant, et mesurable dans certaines conditions (« essai à vide » du moteur asynchrone) ; le courant magnétisant a donc pour expression :

$$\underline{i}_{\mu} = \sqrt{2}.I_{\mu s}.e^{j.(\omega_1.t-\varphi_{\mu})} \text{ ou } \left(i_{\mu}\right) = \sqrt{2}.I_{\mu s}.\begin{pmatrix}\cos(\omega_1.t-\varphi_{\mu})\\ \cos(\omega_1.t-\varphi_{\mu})\end{pmatrix} \quad [5.77]$$

et l'on peut en donner une définition « physique » : *c'est le courant statorique qui, s'il était seul à circuler dans la machine, créerait le champ total.* C'est surtout un changement de variable extrêmement pratique à manipuler.

5.10.2.3. *Champ total et courant magnétisant en régime transitoire quelconque*

On peut étendre cette définition à un régime transitoire quelconque. Le courant magnétisant est défini, d'abord sous forme réelle, par :

$$F_t = F_{st} + F_{rt} = A_{s\alpha}.i_{\mu}.\cos(-p.\xi + \upsilon_{\mu}) \quad [5.78]$$

puis, sous forme complexe :

$$\underline{F}_t = \underline{F}_{st} + \underline{F}_{rt} = A_{s\alpha}.i_{\mu}.e^{j.(-p.\xi+\upsilon_{\mu})} \quad [5.79]$$

La comparaison des formules [5.79] et [5.69] donne la relation fondamentale :

$$i_{\mu}.e^{j.(-p.\xi+\upsilon_{\mu})} = i_s.e^{j.(-p.\xi+\upsilon_s)} + \frac{A_{r\alpha}}{A_{s\alpha}}.i_r.^{j.(-p.\xi+\upsilon_r+p.\theta)} \quad [5.80]$$

Il est classique de définir le « rapport de transformation » :

$$m = \frac{A_{r\alpha}}{A_{s\alpha}} = \frac{A_A}{A_a} = \frac{k_r.N_r}{k_s.N_s} \quad [5.81]$$

et de « simplifier [5.80] par $e^{-j.p.\xi}$ », alors l'équation [5.80] donne la « loi au nœud » :

$$i_{\mu}.e^{j.(+\upsilon_{\mu})} = i_s.e^{j.(+\upsilon_s)} + m.e^{j.(+\upsilon_r+p.\theta)}.i_r \quad [5.82]$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\underline{i}_{\mu} = \underline{i}_s + m.e^{j.p.\theta}.\underline{i}_r \qquad [5.83]$$

La forme réelle peut être obtenue à partir des formules [5.78] et [5.68] :

$$\begin{aligned} F_t &= F_{st} + F_{rt} = A_{s\alpha}.i_s.\cos(-p.\xi + \upsilon_s) + A_{r\alpha}.i_r.\cos(-p.\xi + \upsilon_r + p.\theta) \\ &= A_{s\alpha}.i_{\mu}.\cos(-p.\xi + \upsilon_{\mu}) \end{aligned} \qquad [5.84]$$

et la forme réelle de la loi au nœud peut être déduite, soit de l'équation [5.83] (par séparation des parties réelles et des parties imaginaires), soit de l'équation [5.84] (par identification des coefficients de *sin*($p.\xi$) et des coefficients de *cos*($p.\xi$), puisque cette identité doit être vérifiée quel que soit $\xi$), et on obtient :

$$\begin{pmatrix} i_{\mu\alpha} \\ i_{\mu\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} + m.P(p.\theta).\begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} \qquad [5.85]$$

REMARQUE.– On doit observer que les lois aux nœuds [5.85] et [5.83] contiennent les mêmes informations que les sommes de FMM [5.84] et [5.79]. En s'inspirant du diagramme des courants (habituellement défini en régime permanent), on peut proposer une illustration géométrique, celle de la figure 5.5a, où cette construction de Fresnel symbolise sous une forme très simple la somme de deux forces magnétomotrices qui créent une FMM résultante donnée par le seul courant magnétisant $i_{\mu}$. Cette relation permet aussi de définir des schémas équivalents (figure 5.5b).

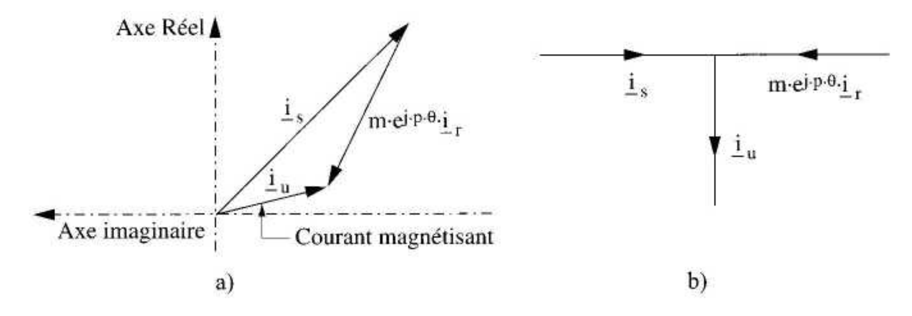



**Figure 5.5.** *Diagramme des courants : a) courant magnétisant, b) loi au nœud*

### 5.10.3. *Extension à l'excitation rotorique en courant continu*

Le concept de courant magnétisant appliqué au moteur asynchrone est classique. Il est moins classique de l'appliquer au moteur synchrone, mais nous allons voir qu'on peut le faire. La figure 5.6 représente une machine synchrone à pôles lisses, à stator triphasé, qui fixe les notations.

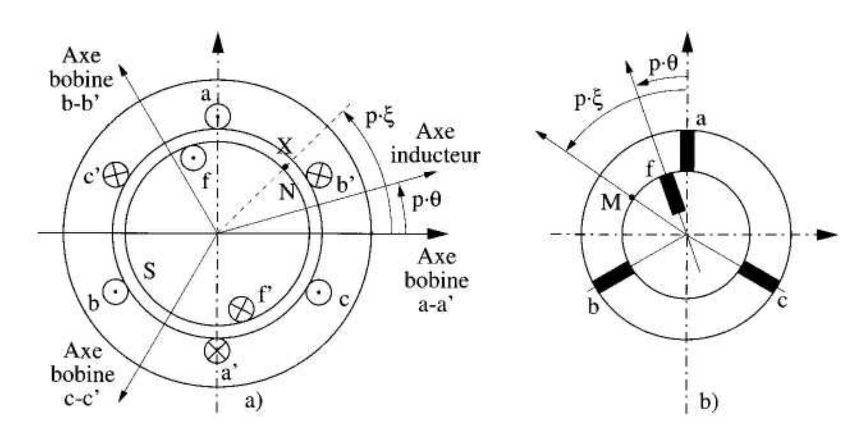



**Figure 5.6.** *Machine synchrone à pôles lisses : a) schéma physique avec p = 1 ; b) schéma symbolique*

Le rotor est alimenté en courant continu par un courant d'amplitude $i_f$. Il crée une FMM dont l'expression est (phaseur spatio-temporel sous forme réelle) :

$$F_{rt} = A_f.i_f.\cos(-p.\xi + p.\theta), \text{ avec } A_f = \frac{2}{\pi}.k_f.n_f \qquad [5.86]$$

où $n_f$ est le nombre de spires par paire de pôles, et $k_f$ le coefficient de bobinage relatif au premier harmonique. La forme complexe du phaseur spatio-temporel est :

$$\underline{F}_{rt} = A_f.i_f.e^{j.(-p.\xi+p.\theta)}, \text{ avec } A_f = \frac{2}{\pi}.k_f.n_f \qquad [5.87]$$

On voit que l'on peut associer à la formule [5.86] un phaseur temporel complexe ou réel, donné par :

$$\underline{i}_f = i_f.e^{j.p.\theta} \text{ ou } \begin{pmatrix} i_{f\alpha} \\ i_{f\beta} \end{pmatrix} = i_f.\begin{pmatrix} \cos(p.\theta) \\ \sin(p.\theta) \end{pmatrix} \qquad [5.88]$$

Ce qui définit un courant alternatif fictif équivalent au courant d'excitation :

$$\left(i_{f2}\right) = \begin{pmatrix} i_{f\alpha} \\ i_{f\beta} \end{pmatrix} = i_f.\begin{pmatrix} \cos(p.\theta) \\ \sin(p.\theta) \end{pmatrix} \qquad [5.89]$$

Nous allons écrire la FMM totale, donnée par la superposition de la FMM créée par le stator (voir formules [5.58] à [5.60]) et de la FMM créée par le rotor (voir [5.86]). On écrit d'abord la forme réelle [5.90], où l'on introduit la définition d'un courant magnétisant qui a la même définition qu'au paragraphe 5.10.2.3. (variante de la formule [5.84]) :

$$\begin{aligned} F_t &= F_{st} + F_{rt} = A_{s\alpha}.i_s.\cos(-p.\xi + \upsilon_s) + A_f.i_f.\cos(-p.\xi + p.\theta) \\ &= A_{s\alpha}.i_\mu.\cos(-p.\xi + \upsilon_\mu) \end{aligned} \qquad [5.90]$$

puis la forme complexe du phaseur spatio-temporel, à partir des formules [5.69] et [5.79], soit :

$$\underline{F}_t = A_{s\alpha}.i_s.e^{j.(-p.\xi+\upsilon_s)} + A_f.i_f.^{j.(-p.\xi+p.\theta)} = A_{s\alpha}.i_\mu.e^{j.(-p.\xi+\upsilon_\mu)} \qquad [5.91]$$

Par des calculs analogues à ceux effectués au paragraphe précédent, on peut définir des courants magnétisants qui sont des courants statoriques fictifs qui créent la FMM totale ; la forme complexe est donnée par :

$$\underline{i}_\mu = i_\mu.e^{j.\upsilon_\mu} = \underline{i}_s + m.\underline{i}_f = \underline{i}_s + m.e^{j.p.\theta}.i_f \text{ avec : } m = A_f / A_{s\alpha} \qquad [5.92]$$

et la forme réelle, polaire, est donnée par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_{\mu\alpha} \\ i_{\mu\beta} \end{pmatrix} &= i_\mu.\begin{pmatrix} \cos(\upsilon_\mu) \\ \sin(\upsilon_\mu) \end{pmatrix} = i_\mu.P(\upsilon_\mu).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= i_s.P(\upsilon_s).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m.i_f.P(p.\theta).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad [5.93]$$

## 5.11. Calcul du flux dans les machines à pôles lisses

### 5.11.1. *Calcul du flux principal dans une phase*

La connaissance de la FMM créée par une machine permet de calculer l'induction dans l'entrefer, puis le flux créé par cette induction dans une phase. Pour donner un maximum de généralité à ces résultat, nous noterons avec l'indice $\gamma$ la FMM créée par une armature « inductrice ». Le phaseur temporel associé au courant « inducteur » aura donc comme expression, réelle et complexe :

$$\begin{pmatrix} i_{\gamma\alpha} \\ i_{\gamma\mu\beta} \end{pmatrix} = i_\gamma . \begin{pmatrix} \cos(\upsilon_\gamma) \\ \sin(\upsilon_\gamma) \end{pmatrix} = i_\gamma . P(\upsilon_\gamma) . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \underline{i}_\gamma = i_\gamma . e^{j.\upsilon_\gamma} \qquad [5.94]$$

et le phaseur spatio-temporel associé à la FMM aura comme expression, temporelle et complexe :

$$F_\gamma = A_\gamma . i_\gamma . \cos(-p.\xi + \upsilon_\gamma) \text{ et } \underline{F}_\gamma = A_\gamma . i_\gamma . e^{j.(-p.\xi + \upsilon_\gamma)} \qquad [5.95]$$

Cette forme générale nous permet de calculer le champ créé par un stator triphasé, par un rotor triphasé, par un rotor monophasé (excitation) par un champ total décrit par un courant magnétisant, comme résumé par le tableau 5.1.

| $A_\gamma$ | $i_\gamma$ | $\upsilon_\gamma$ | |
|---|---|---|---|
| $A_{s\alpha\beta} = \frac{3}{2}.A_{abc}$ | $i_s$ | $\upsilon_s$ | Statorique |
| $A_{r\alpha\beta} = \frac{3}{2}.A_{ABC}$ | $I_r$ | $\upsilon_r + p.\theta$ | Rotorique (asynchrone) |
| $A_f$ | $i_f$ | $p.\theta$ | Rotorique (synchrone) |
| $A_{s\alpha\beta} = \frac{3}{2}.A_{abc}$ | $i_\mu$ | $\upsilon_\mu$ | Total (courant magnétisant) |

**Tableau 5.1.** *Différentes variantes de FMM inductrices*

Pour calculer le flux dans une phase « induite », on examine la figure 5.7 qui indique que la phase induite est indicée $\delta$, que l'axe de cette phase est orientée suivant l'angle $\xi_\delta$, et l'ouverture de l'enroulement concentré diamétral qui la représente est π/p (pour plus de détail sur ces questions, voir le chapitre 3 « Modélisation physique »).

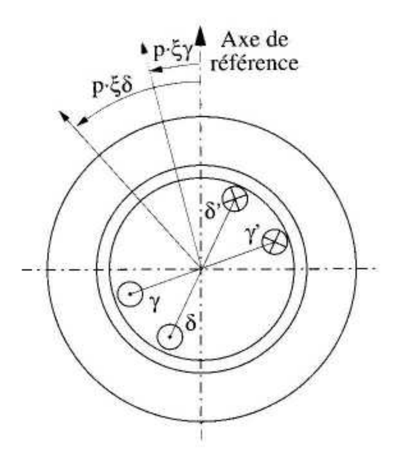



**Figure 5.7.** *Phase inductrice (γ) et phase induite (δ)*

Le nombre de conducteurs en série dans la phase induite est $N_\delta$ et le coefficient de bobinage est $k_\delta$. Alors, le flux induit dans la phase est donné par l'intégrale [5.96].

$$\psi_\delta = p.\frac{k_\delta.N_\delta}{2.p}.L.\frac{D}{2}.P_0.\left\{ \int_{\delta-\frac{\pi}{2.p}}^{\delta+\frac{\pi}{2.p}} A_\gamma.i_\gamma.\cos\left(p.\xi - \upsilon_\gamma\right).d\xi \right\} \qquad [5.96]$$

où $L$ est la longueur utile de la machine, $D$ le diamètre au niveau de l'entrefer, $P_0$ est la perméance superficielle ($P_0 = \mu_0 / e$, où $\mu_0$ est la perméabilité du vide, et $e$ l'épaisseur de l'entrefer) et $A_\gamma = \frac{2}{\pi}.\frac{k_\gamma.N_\gamma}{2.p}$. Le calcul de l'intégrale [5.96] donne le résultat suivant :

$$\psi_\delta = \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{k_\delta.N_\delta}{2.p}.\frac{k_\gamma.N_\gamma}{2.p}.i_\gamma.\cos\left(p.\delta - \upsilon_\gamma\right) \qquad [5.97]$$

### 5.11.2. *Application : flux principal dans un stator*

#### 5.11.2.1. *Détermination du phaseur associé aux flux*

La formule [5.97] peut être appliquée au calcul du flux créé par des courants triphasés inducteurs, dont le phaseur est ($\underline{i}_\gamma$), dans les trois phases d'un stator triphasé : on notera que les nombres de spires des enroulements induits vérifient

$k_\delta.N_\delta = k_s.N_s$ , mais que les nombres de spires relatifs au courant inducteur triphasé vérifieront $k_\gamma.N_\gamma = (3/2).k_s.N_s$ (puisque l'enroulement inducteur est défini à partir d'un enroulement diphasé équivalent, voir l'équation [5.21]).

Les phases *a*, *b* et *c* ont des axes dont les directions sont $\xi_{\delta a} = 0$, $\xi_{\delta b} = 2.\pi/3$ et $\xi_{\delta c} = -2.\pi/3$. L'application de la formule [5.97] aux trois phases statoriques donne alors :

$$\begin{pmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{k_s.N_s}{2.p}.\frac{k_\gamma.N_\gamma}{2.p}.\begin{pmatrix} \cos(\upsilon_\gamma) \\ \cos(\upsilon_\gamma - 2.\pi/3) \\ \cos(\upsilon_\gamma + 2.\pi/3) \end{pmatrix}.i_\gamma \qquad [5.98]$$

L'indice *p* est là pour rappeler que ce calcul ne concerne que le champ principal et ne contient pas les termes dus aux fuites (voir chapitre 3). On calcule maintenant le phaseur relatif aux flux, suivant la formule [5.20] :

$$\begin{pmatrix} \psi_{ps\alpha} \\ \psi_{ps\beta} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.C_{32}{}^t.\begin{pmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{k_s.N_s}{2.p}.\frac{k_\gamma.N_\gamma}{2.p}.\frac{2}{3}.C_{32}{}^t.C_{32}.\begin{pmatrix} \cos(\upsilon_\gamma) \\ \sin(\upsilon_\gamma) \end{pmatrix}.i_\gamma \qquad [5.99]$$

Ce résultat se simplifie en :

$$\begin{pmatrix} \psi_{ps\alpha} \\ \psi_{ps\beta} \end{pmatrix} = L_{ps\gamma 0}.P(\upsilon_\gamma).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.i_\gamma = L_{ps\gamma 0}.\begin{pmatrix} i_{\gamma\alpha} \\ i_{\gamma\beta} \end{pmatrix} \qquad [5.100]$$

avec :

$$L_{ps\gamma 0} = \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{k_s.N_s}{2.p}.\frac{k_\gamma.N_\gamma}{2.p} \qquad [5.101]$$

Le résultat [5.100] est un phaseur réel associé aux flux. On peut en déduire la formulation donnée par la forme complexe :

$$\underline{\psi}_{ps} = \psi_{ps\alpha} + j.\psi_{ps\beta} = L_{ps\gamma 0}.i_\gamma.e^{j.p.\upsilon_\gamma} = L_{ps\gamma 0}.\underline{i}_\gamma \qquad [5.102]$$

5.11.2.2. *Equivalence des phaseurs*

Nous supposons connus les paramètres constructifs de la machine. Alors, les formules [5.100] et [5.102] montrent qu'il y a équivalence entre les informations données par le phaseur temporel (réel ou complexe) associé aux courants (voir l'équation [5.94]) et les informations données par le phaseur temporel (réel ou complexe) associé aux flux principaux. Or, la connaissance du phaseur temporel associé aux courants magnétisants donne les informations qui définissent le phaseur spatio-temporel (réel ou complexe) associé au champ (voir la formule [5.95]). *Il y a donc équivalence des informations données par ces différents phaseurs.*

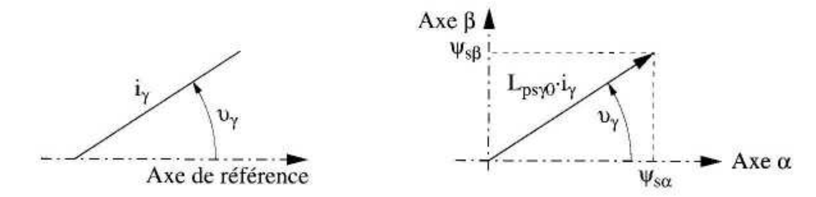



**Figure 5.8.** *Equivalence entre les phaseurs*

La figure 5.8 illustre cette propriété très utile, puisqu'en pratique il suffit souvent de connaître les courants et les diagrammes associés aux courants pour connaître les propriétés des variables magnétiques au sein de la machine. C'est le cas du « diagramme du cercle », c'est-à-dire du diagramme de Fresnel des courants de la machine asynchrone, qui nous renseigne sur la distribution des champs (statoriques, rotoriques, résultant) à l'intérieur de la machine.

### 5.11.3. *Application : modèle du flux statorique dans une machine asynchrone*

On applique maintenant les formules [5.100] et [5.101] au cas où le courant inducteur est le courant magnétisant créé par un stator triphasé et un rotor également triphasé (voir paragraphe 5.10.2.3, formules [5.83] et [5.85]). Nous écrivons d'abord le flux statorique principal sous forme réelle :

$$\begin{pmatrix} \psi_{psa} \\ \psi_{ps\beta} \end{pmatrix} = L_{10} \cdot \begin{pmatrix} i_{\gamma\alpha} \\ i_{\gamma\beta} \end{pmatrix} = L_{10} \cdot \left[ \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} + m.P(p.\theta) . \begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} \right] \qquad [5.103]$$

avec :

$$L_{10} = \frac{2}{\pi} .L.D.P_0 . \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{k_s .N_s}{2.p} \right)^2$$

En effet $k_\gamma.N_\gamma = (3/2).k_s.N_s$. Notons que pour avoir le flux total dans l'enroulement statorique, il faut ajouter les flux de fuite qui sont du type : $l_1.(i_{s2})$, forme réelle, et $l_1.\underline{i}_s$, pour la forme complexe. On pose $L_1 = L_{10} + l_1$ (c'est une « inductance cyclique »).

Dans ces notations, l'indice 1 désigne le stator (c'est un « primaire ») et l'usage de l'indice 0 permet de différentier un terme relatif uniquement au flux principal d'un terme dû au flux total qui inclut les fuites. On définit également l'amplitude de la « mutuelle cyclique » :

$$M = m.L_{10} = \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{3}{2}.\left(\frac{k_s.N_s}{2.p}\right).\left(\frac{k_r.N_r}{2.p}\right)$$

On développe [5.103], et on peut écrire le flux statorique principal sous la forme réelle :

$$(\psi_{s2}) = L_1.(i_{s2}) + M.P(p.\theta)(i_{r2}) \qquad [5.104]$$

On peut en déduire immédiatement la forme complexe :

$$\underline{\psi}_s = L_1.\underline{i}_s + M.e^{j.p.\theta}.\underline{i}_r \qquad [5.105]$$

### 5.11.4. *Application : modèle du flux rotorique dans une machine asynchrone*

Des calculs analogues à ceux menés dans les précédents paragraphes donnent les flux principaux dans les trois phases du rotor. On note $N_r$ et $k_r$, le nombre de conducteurs en série et le coefficient de bobinage des enroulements rotoriques. On obtient alors, d'abord avec un courant inducteur quelconque :

$$\begin{pmatrix}\psi_{pA}\\ \psi_{pB}\\ \psi_{pC}\end{pmatrix} = \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{k_r.N_r}{2.p}.\frac{k_\gamma.N_\gamma}{2.p}.\begin{pmatrix}\cos(\upsilon_\gamma - p.\theta)\\ \cos(\upsilon_\gamma - 2.\pi/3 - p.\theta)\\ \cos(\upsilon_\gamma + 2.\pi/3 - p.\theta)\end{pmatrix}.i_\gamma \qquad [5.106]$$

puis, pour le phaseur associé aux flux triphasés créés au rotor par le courant magnétisant :

$$\begin{pmatrix} \psi_{pr\alpha} \\ \psi_{pr\beta} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.C_{32}{}^{t} \begin{pmatrix} \psi_{pA} \\ \psi_{pB} \\ \psi_{pC} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{k_r.N_r}{2.p}.\frac{3}{2}\frac{k_s.N_s}{2.p}.P\left(\upsilon_\mu - p.\theta\right).i_\mu.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [5.107]$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{pmatrix} \psi_{pr\alpha} \\ \psi_{pr\beta} \end{pmatrix} = M.P\left(-p.\theta\right).P\left(\upsilon_\mu\right).i_\mu.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [5.108]$$

car on a reconnu le paramètre $M$ (avec $M = m.L_{10}$, voir paragraphe précédent). Là aussi, pour avoir le flux total dans l'enroulement rotorique, il faut ajouter les flux de fuite qui sont du type : $l_2.(i_{r2})$, pour la forme réelle, et $l_2.\underline{i}_r$, pour la forme complexe. Si l'on remplace le courant magnétisant par son expression en fonction des courants statoriques et rotoriques (voir la formule [5.85] qui donne la forme réelle), et si l'on pose $L_2 = L_{20} + l_2$, (l'indice 2 : le rotor est considéré comme un « secondaire ») avec :

$$L_{20} = m.M = m^2.L_{10} = \frac{2}{\pi}.L.D.P_0.\frac{3}{2}.\left(\frac{k_r.N_r}{2.p}\right)^2$$

on obtient les équations du flux rotorique, sous forme réelle :

$$\left(\psi_{r2}\right) = M.P\left(-p.\theta\right).\left(i_{s2}\right) + L_2.\left(i_{r2}\right) \qquad [5.109]$$

On en déduit immédiatement la forme complexe :

$$\underline{\psi}_r = M.e^{-j.p.\theta}.\underline{i}_s + L_2.\underline{i}_r \qquad [5.110]$$

### 5.11.5. *Application : modèle du flux statorique dans une machine synchrone*

On peut appliquer la même méthode pour déterminer le flux principal statorique dans le cas d'une machine synchrone. Les calculs sont strictement analogues, grâce à l'usage du courant magnétisant [5.93] ou [5.92]. On obtient pour la forme réelle :

$$\begin{pmatrix} \psi_{ps\alpha} \\ \psi_{ps\beta} \end{pmatrix} = L_{10} \cdot \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} + m.L_{10}.i_f \cdot \begin{pmatrix} \cos(p.\theta) \\ \sin(p.\theta) \end{pmatrix} \qquad [5.111]$$

avec $m = A_f / A_\alpha$ et on peut poser $M_f = m.L_{10}$. Pour avoir le flux total dans l'enroulement statorique, il faut ajouter les flux de fuite qui sont du type $l_1.(i_{s2})$, forme réelle, et $l_1.\underline{i}_s$, pour la forme complexe. On définit $L_1$ comme au paragraphe 5.11.3 et on peut écrire le flux statorique sous la forme réelle la plus compacte, avec :

$$(\psi_{s2}) = L_1.(i_{s2}) + M_f.i_f.P(p.\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [5.112]$$

et pour la forme complexe :

$$(\underline{\psi}_{s2}) = L_1.\underline{i}_s + M_f.e^{j.p.\theta}.i_f \qquad [5.113]$$

## 5.12. Le phaseur mathématique

### 5.12.1. *Définition et discussion*

Dans les paragraphes précédents, nous avons donné une définition des phaseurs sur des bases physiques : les effets des grandeurs triphasées (le champ créé par un enroulement triphasé) peuvent être réalisés par des enroulements diphasés équivalents. On en a déduit la transformation définie par les formules [5.20] et [5.22]. On peut cependant en donner une définition abstraite, basée sur les propriétés vectorielles des matrices intervenant dans les équations triphasées des machines. Pour ces propriétés, on se reportera aux chapitres 3 « Modélisation physique » et 4 « Propriétés vectorielles des systèmes triphasés » de cet ouvrage.

Dans la section 4.5 de ce dernier chapitre, nous avons montré que le phaseur complexe $\underline{x}$ est identique à la première composante diphasée $x_+$ de la « transformée initiale de Fortescue » et la deuxième composante diphasée $x_-$ est la quantité conjuguée du phaseur complexe $\underline{x}$*. Mais le plus souvent, les utilisateur définissent directement une transformée à l'aide d'un formalisme, apparemment simple, qui fait appel à la seule formule [5.41], soit :

$$\underline{x} = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix}.(x_3) = \frac{2}{3}.\left(x_a + a.x_b + a^2.x_c\right) \qquad [5.41]$$

Cette transformation est aussi appelée par certains auteurs « transformée à un axe » [CHA 83]. L'usage d'une seule composante s'appuie sur le fait que l'autre composante diphasée, $\underline{x}^*$ est la conjuguée et que la connaissance du phaseur $\underline{x}$ seul est suffisante, car cette définition fait aussi l'hypothèse implicite (mais pas toujours énoncée) que l'on ne s'intéresse pas à la composante homopolaire, l'argument principal étant que celle-ci est le plus souvent nulle. Cela est vrai dans de nombreuses applications dans la commande des machines à courant alternatif, puisque celles-ci sont habituellement alimentées par des onduleurs en pont, il n'y a pas de 4e fil, donc la somme des courants est nulle : $i_a + i_b + i_c = 0$. On en déduit que la composante homopolaire des courants est nulle (voir la définition [5.42]) et les équations des machines à courant alternatif montrent, de proche en proche, que toutes les autres variables ont des composantes homopolaires nulles. La seule définition [5.41] semble donc suffire. Cette hypothèse est cependant critiquable, car l'un des avantages des modélisations par transformation, est qu'on peut les appliquer également aux onduleurs et à leur commande (voir le chapitre 4 du second volume sur les onduleurs). Or, pour les onduleurs, *il est souvent avantageux d'introduire des composantes homopolaires dans les signaux de commande*. C'est pourquoi, et cela sera en outre fort pratique pour mener à bien les calculs, nous préférons rattacher la définition [5.41] des phaseurs, à la définition plus complète de la transformation initiale de Fortescue, telle qu'elle est définie par [5.42] pour la composante homopolaire et par [5.40] pour les composantes diphasées :

$$x_0 = \frac{1}{3}.F_{31}{}^{t}.(x_3) = F_{31I}{}^{t}.(x_3) = \frac{1}{3}.(x_a + x_b + x_c) \qquad [5.42]$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.F_{32}{}^{t*}.(x_3) = F_{32I}{}^{t*}.(x_3) = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}.(x_3) \qquad [5.40]$$

La « transformée initiale de Fortescue » utilise les coefficients 1/3 pour la composante homopolaire et 2/3 pour la composante diphasée. Dans le chapitre 4 « Propriétés vectorielles des systèmes triphasés », il est montré que d'autres variantes des transformées de Fortescue sont possibles et tout à fait légitimes. Mais cette variante est l'une des plus répandue [BUH 79, LAZ 87, VAS 90] ; elle s'appuie sur le fait que les amplitudes des variables en régime sinusoïdal sont conservées (voir les formules [5.46] et [5.48]). De ce fait, elle est bien adaptée aux systèmes décrits par une seule variable, les tensions par exemple, et cet outil est très

populaire pour la modélisation des onduleurs, en particulier dans le cas des « commandes directe du couple » (DTC, *Direct Torque Control*).

En revanche, nous considérons qu'elle est moins bien adaptée à la description des systèmes lorsque l'on s'intéresse à plusieurs variables (tensions et courants, principalement), car elle ne conserve pas l'expression des puissances (voir formules [5.54], [5.55] et [5.56]).

Par ailleurs, de nombreux auteurs se limitent à l'usage des phaseurs sous la forme complexe [5.41]. Dans les premiers paragraphes de ce chapitre, nous avons montré que l'on peut faire un parallèle constant avec le phaseur sous forme d'un vecteur réel (défini par [5.20]), complètement équivalent au phaseur sous sa forme complexe. On peut simplement dire que de nombreux auteurs trouvent pratique de travailler avec le seul phaseur complexe, mais que celui-ci a les mêmes propriétés que le phaseur sous forme réelle, comme le montre les « formule de passage réel-complexe » [5.35] et [5.36]. On peut aussi observer que l*es électriciens ont l'habitude de travailler avec des nombres complexes, ils savent en déduire des schémas équivalents (grâce au concept d'impédance)*, et cela est évidemment très important.

En pratique pour implanter les lois de commande dans les microprocesseurs, il est nécessaire de revenir à des grandeurs réelles. Mais les formules de passage « réel-complexe » dans le cas de cette « transformée initiale » sont très simples : *il suffit de séparer les parties imaginaires et complexes pour retrouver les composantes du vecteur réel.*

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons donc nous appuyer sur la définition classique des phaseurs complexes et donner quelques applications qui en montrent l'intérêt.

### 5.12.2. *Inversion*

La reconstitution des variables triphasées à partir de la composante homopolaire (quand elle n'est pas nulle) et du phaseur $\underline{x}$ est aisé si l'on emploie le formalisme matriciel de Fortescue. L'inversion des définitions [5.40] et [5.42] donne :

$$(x_3) = x_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{bmatrix} \qquad [5.114]$$

Ces formules peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$(x_3) = F_{31}.x_0 + \frac{1}{2}.F_{32}.\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \end{bmatrix} \quad [5.115]$$

La formule [5.115] précise que la « matrice initiale de Fortescue » est la concaténation suivante :

$$F_{3I} = \begin{bmatrix} F_{31} & \frac{1}{2}.F_{32} \end{bmatrix}$$

En pratique, il est cohérent d'écrire l'inversion à l'aide des seuls nombres $x_0$ et $\underline{x}$, et on peut donner une forme scalaire à [5.114] :

$$\begin{cases} x_a = x_0 + \mathrm{Re}(\underline{x}) \\ x_b = x_0 + \mathrm{Re}(a^2.\underline{x}) \\ x_c = x_0 + \mathrm{Re}(a.\underline{x}) \end{cases} \quad [5.116]$$

Nous pouvons aussi rappeler l'expression de la puissance avec cette transformation :

$$p = 3.v_0.i_0 + \frac{3}{4}.(\underline{v}.\underline{i}^* + \underline{v}^*.\underline{i}) = 3.v_0.i_0 + \frac{3}{2}.\mathrm{Re}(\underline{v}.\underline{i}^*) \quad [5.117]$$

Certaines applications sont importantes. Celles qui concernent les régimes permanents en tout premier lieu. Nous donnerons aussi les représentations associées aux onduleurs de tension à deux niveau, et nous donnerons une deuxième approche de la modélisation des flux de la machine asynchrone à partir des expressions des flux triphasés.

### 5.12.3. *Applications au régime permanent sinusoïdal*

La factorisation des systèmes sinusoïdaux triphasés donnée par [5.12] et [5.13] permet de réécrire un système triphasé équilibré direct, d'amplitude efficace $X$, de pulsation $\omega$ et de déphasage $\phi$ sous la forme détaillée suivante :

$$(x_3) = \sqrt{2}.X.\begin{bmatrix} \cos(\omega.t+\phi) \\ \cos(\omega.t+\phi-2.\pi/3) \\ \cos(\omega.t+\phi+2.\pi/3) \end{bmatrix} = \sqrt{2}.X.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix}.\frac{1}{2}.\begin{bmatrix} e^{j.(\omega.t+\phi)} \\ e^{-j.(\omega.t+\phi)} \end{bmatrix} \quad [5.118]$$

L'application de la transformation [5.41] donne la formule :

$$\underline{x} = \sqrt{2}.X.\frac{2}{3}.\begin{bmatrix}1 & a & a^2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ a^2 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}.\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}e^{j.(\omega.t+\phi)}\\ e^{-j.(\omega.t+\phi)}\end{bmatrix} \qquad [5.119]$$

On remarque que le produit de la ligne ($1\ a\ a^2$) par la première colonne de $F_{32}$ donne le scalaire 3 et le produit par la deuxième colonne donne 0. On a donc :

$$\underline{x} = \sqrt{2}.X.\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}e^{j.(\omega.t+\phi)}\\ e^{-j.(\omega.t+\phi)}\end{bmatrix} = \sqrt{2}.X.e^{j.(\omega.t+\phi)} \qquad [5.120]$$

On retrouve le résultat déjà vu avec la formule [5.48] : l'amplitude est préservée par cette transformation.

### 5.12.4. *Applications à l'onduleur de tension triphasé*

Dans le second volume de cet ouvrage, le chapitre 4 est consacré à la modélisation des onduleurs de tension à deux niveaux qui sont les convertisseurs statiques les plus utilisés pour l'alimentation des machines à vitesse variable. Nous rappelons ici le schéma de l'onduleur, figure 5.9.

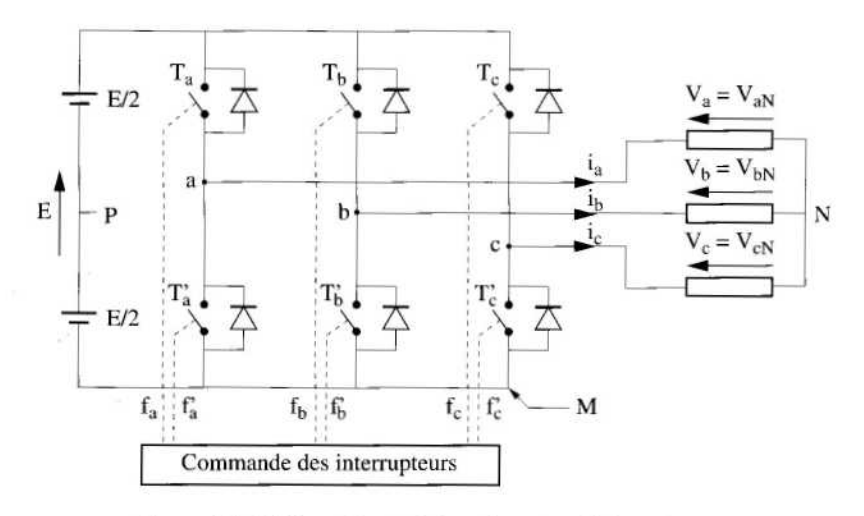



**Figure 5.9.** *Schéma d'un onduleur de tension à deux niveaux*

La figure 5.9 précise les notations : les tensions d'entrée sont les tensions prises entre les bornes $a$, $b$ et $c$ et le « point bas » $M$. Ces tensions sont imposées par les états des interrupteurs décrits par les variables $f_i$ : si $f_i = 1$ il est fermé et si $f_i = 0$, il est ouvert. Sur une même branche les interrupteurs $f_i$ et $f_i'$ ont des états complémentaires. Alors $v_{iM} = E.fi$. Les tensions de sortie sont les tensions simples qui alimentent la charge : $v_a = v_{aN}$, $v_b = v_{bN}$ et $v_c = v_{cN}$. Un résultat classique (voir le chapitre 4 du second volume sur les onduleurs) permet d'écrire :

$$(v_3) = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = G.\begin{pmatrix} v_{aM} \\ v_{bM} \\ v_{cM} \end{pmatrix} = E.G.\begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad [5.121]$$

avec :

$$G = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad [5.122]$$

Les trois interrupteurs n'ayant que deux états possibles, l'onduleur ne peut donc posséder que huit configurations : deux configurations où il génère des tensions de sortie nulles, et qui sont numérotées 0 et 7, et six configurations qui génèrent des états non nuls, et qui sont numérotées de 1 à 6. Le tableau 5.2 résume les propriétés de l'onduleur.

| | **Commande** | | | **Tensions composées** | | | **Tensions simples** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° | $f_a$ | $f_b$ | $f_c$ | $v_a - v_b$ | $v_b - v_c$ | $v_c - v_a$ | $v_a$ | $v_b$ | $v_c$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | E | 0 | –E | 2E/3 | –E/3 | –E/3 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | E | –E | E/3 | E/3 | –2E/3 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | –E | E | 0 | –E/3 | 2E/3 | –E/3 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | –E | 0 | E | –2E/3 | E/3 | E/3 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | –E | E | –E/3 | –E/3 | 2E/3 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | E | –E | 0 | E/3 | –2E/3 | E/3 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Tableau 5.2.** *Les huit états réalisables d'un onduleur*

Les propriétés mathématiques du modèle de l'onduleur sont décrites par les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de gain $G$ (voir formule [5.122]). Dans le chapitre 4, il est précisé qu'il a une valeur propre nulle, associée à la direction définie par le vecteur colonne $C_{31}$ ou $F_{31}$ (« direction homopolaire »). Ses deux autres valeurs propres sont égales et valent 1. Ses directions propres sont un plan orthogonal à la direction homopolaire (« plan diphasé »). On peut choisir comme vecteurs propres les colonnes de $C_{32}$ ou de $F_{32}$ et on peut donner une diagonalisation de $G$ avec la matrice classique de Fortescue $F_3$ :

$$G = F_3 . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \frac{1}{3} . F_3^{t*} \qquad [5.123]$$

L'application de la transformation [5.41] à [5.122] et [5.123] donne :

$$\underline{v} = \frac{2.E}{3} . \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \qquad [5.124]$$

Ce résultat donne lieu à huit applications résumées dans le tableau 5.3 où nous donnons les parties réelles et imaginaires du phaseur complexe $\underline{v}$, c'est-à-dire les deux composantes du phaseur sous forme d'un vecteur réel ($v_2$).

| **Vecteurs** | **Etat des interrupteurs** | | | **Phaseur (v2)** | |
|---|---|---|---|---|---|
| N° | $f_a$ | $f_b$ | $f_c$ | $\frac{v_\alpha}{2.E/3}$ | $\frac{v_\beta}{2.E/3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1/2 | $\sqrt{3}/2$ |
| 3 | 0 | 1 | 0 | –1/2 | $\sqrt{3}/2$ |
| 4 | 0 | 1 | 1 | –1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | –1/2 | $-\sqrt{3}/2$ |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 1/2 | $-\sqrt{3}/2$ |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Tableau 5.3.** *Phaseurs des huit tensions réalisables par un onduleur à deux niveaux*

On peut écrire les six vecteurs actifs sous forme algébrique. Pour cela, on définit un angle $\theta_i$, où i est le numéro de l'état ($i$ = 1 à 6) :

$$\theta_i = (i-1).\frac{\pi}{3} \qquad [5.125]$$

Alors, une forme réelle du phaseur temporel de tension est :

$$(v_2)_i = \frac{2.E}{3}.P(\theta_i).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (v_2)_1.P(\theta_i).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad [5.126]$$

et une forme complexe est :

$$\underline{v}_{2i} = v_\alpha + j.v_\beta = \frac{2.E}{3}.e^{j.\theta_i} \qquad [5.127]$$

Ces résultats peuvent être illustrés par la figure 5.10 qui donne la « représentation vectorielle » de l'onduleur :

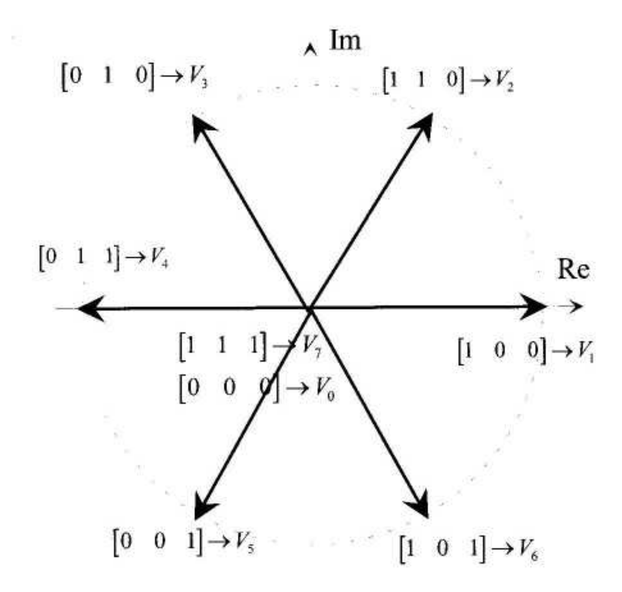



**Figure 5.10.** *Représentation vectorielle des états de l'onduleur*

### 5.12.5. *Applications à la modélisation de la machine asynchrone*

C'est incontestablement dans la définition de modèles pour la machine asynchrone que les phaseurs sont le plus utilisés. Dans les paragraphes précédents, nous avons donné une approche physique de cette modélisation. On peut en donner une approche plus formelle, plus « externe ». Avec des arguments abstraits, on peut donner une modélisation de la machine asynchrone triphasée avec les arguments suivants, basés sur les hypothèses fondamentales :

– *triphasé* : les variables statoriques (indicées avec des minuscules : $a$, $b$ et $c$) et rotoriques (indicées avec des majuscules : $A$, $B$ et $C$) constituent des vecteurs :

$$(\psi_{s3}) = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix}, \ (i_{s3}) = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \qquad [5.128]$$

$$(\psi_{r3}) = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \end{pmatrix}, \ (i_{r3}) = \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix}, \ (v_{r3}) = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} \qquad [5.129]$$

La figure 5.11 précise la disposition des enroulements dans la machine.

– *linéarité* : on admet donc que la machine peut avoir des équations aux flux utilisant le concept d'inductances :

$$\begin{bmatrix} (\psi_{s3}) \\ (\psi_{r3}) \end{bmatrix} = L.\begin{bmatrix} (i_{s3}) \\ (i_{r3}) \end{bmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr}(\theta) \\ M_{rs}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} \qquad [5.130]$$

Le lois du magnétisme nous enseignent que les éléments de la matrice $L$ vérifient $L_{ij} = L_{ji}$ ; la matrice L est symétrique, $L^t = L$, donc $L_{ss}$ et $L_{rr}$ sont elles-mêmes symétriques : ${L_{ss}}^t = L_{ss}$, ${L_{rr}}^t = L_{rr}$. Et, en outre $M_{rs}(\theta) = M_{sr}(\theta)^t$ ;

– *symétrie* : les trois enroulements de chaque armature étant identiques et simplement décalés de 120° dans l'espace, on peut en déduire que les matrices sont « circulantes » (chaque ligne de ces matrices se déduisent de la précédente par permutation circulaire). Dans ces conditions, on peut admettre que les matrices $L_{ss}$ et $L_{rr}$ sont de la forme :

$$L_{ss} = \begin{pmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{pmatrix} \text{ et } L_{rr} = \begin{pmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{pmatrix} \qquad [5.131]$$

– *hypothèse du premier harmonique* : les mutuelles entre les enroulements statoriques et rotoriques sont proportionnelles au cosinus de l'angle entre les axes des phases. La matrice $M_{sr}$ est alors de la forme :

$$M_{sr}(\theta) = M_0.\begin{pmatrix} \cos(p.\theta) & \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) \\ \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta) & \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) \\ \cos(p.\theta + \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta - \frac{2.\pi}{3}) & \cos(p.\theta) \end{pmatrix} \qquad [5.132]$$

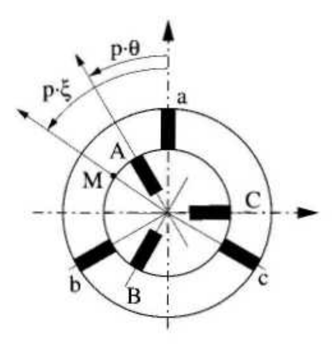



**Figure 5.11.** *Schéma symbolique de la machine asynchrone*

Le but de ce paragraphe est de définir et de déterminer les relations entre les phaseurs associés aux courants et aux flux. Les relations sont en fait basées sur les propriétés vectorielles des matrices ayant les formes de $L_{ss}$ et $L_{rr}$ ou $M_{sr}$. Dans le chapitre 4, on montre que les matrices $L_{ss}$ et $L_{rr}$ ont chacune une valeur propre simple, « l'inductance cyclique » :

$$L_{hs} = L_s + 2.M_s \text{ et } L_{hr} = L_r + 2.M_r \qquad [5.133]$$

Cette valeur propre est associée a une direction propre, la droite colinéaire au vecteur défini par les sous-matrices $C_{31}$ ou $F_{31}$ (« direction homopolaire »). Les autres valeurs propres sont doubles ; ce sont les « inductances cycliques » $L_1$ et $L_2$ :

$$L_1 = L_s - M_s \text{ et } L_2 = L_r - M_r \qquad [5.134]$$

Les directions propres associées à $L_1$ ou $L_2$ doivent se situer sur des vecteurs orthogonaux à la direction homopolaire. On peut donc choisir les colonnes de la sous-matrices $F_{32}$ (on pourrait aussi choisir les colonnes de $C_{32}$). Des matrices de

changements de repère sont donc les matrices classiques de Fortescue $F_3$ (ou les matrices qui en sont déduites). Les diagonalisations de $L_{ss}$ et $L_{rr}$ sont :

$$L_{ss} = F_3.\begin{bmatrix} L_{hs} & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix}.\frac{1}{3}.F_3^{t*} \text{ et } L_{rr} = F_3.\begin{bmatrix} L_{hr} & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix}.\frac{1}{3}.F_3^{t*} \quad [5.135]$$

La matrice $M_{sr}$ a une valeur propre nulle associée à la direction homopolaire et deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\frac{3}{2}.M_0.e^{j.p.\theta} \text{ et } \frac{3}{2}.M_0.e^{-j.p.\theta}$$

associées aux colonnes de $F_{32}$. Une diagonalisation de $M_{sr}$ est donc :

$$M_{sr} = \frac{3}{2}.M_0.F_3.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j.p.\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j.p.\theta} \end{bmatrix}.\frac{1}{3}.F_3^{t*} \quad [5.136]$$

On peut appliquer la définition de la composante homopolaire [5.42] et la définition du phaseur complexe [5.41] à l'équation aux flux [5.130] en prenant en compte les diagonalisations [5.135] et [5.136]. On utilise les propriétés de calcul déjà énoncées au paragraphe 5.12.3, mais aussi la relation [5.40], et on obtient les résultats suivants :

$$\underline{\psi}_s = \frac{2}{3}.[0 \quad 3 \quad 0].\left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} L_{hs} & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} i_{s0} \\ \frac{1}{2}.\underline{i}_s \\ \frac{1}{2}.\underline{i}_s^{\,*} \end{pmatrix} \\ +\frac{3}{2}.M_0.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j.p.\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j.p.\theta} \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} i_{r0} \\ \frac{1}{2}.\underline{i}_r \\ \frac{1}{2}.\underline{i}_r^{\,*} \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \quad [5.137]$$

$$\underline{\psi}_r = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\end{bmatrix}.\left\{\begin{array}{l} +\frac{3}{2}.M_0.\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-j.p.\theta} & 0\\ 0 & 0 & e^{j.p.\theta}\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}i_{s0}\\ \frac{1}{2}.\underline{i}_s\\ \frac{1}{2}.\underline{i}_s^{*}\end{pmatrix}\\ \begin{bmatrix}L_{hr} & 0 & 0\\ 0 & L_2 & 0\\ 0 & 0 & L_2\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}i_{r0}\\ \frac{1}{2}.\underline{i}_r\\ \frac{1}{2}.\underline{i}_r^{*}\end{pmatrix}\end{array}\right\} \qquad [5.138]$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$\underline{\psi}_s = L_1.\underline{i}_s + \frac{3}{2}.M_0.e^{j.p.\theta}.\underline{i}_r \qquad [5.139]$$

$$\underline{\psi}_r = \frac{3}{2}.M_0.e^{-j.p.\theta}.\underline{i}_s + L_2\underline{i}_r \qquad [5.140]$$

Ces équations sont fondamentales pour étudier la machine asynchrone. Les équations aux tensions triphasées sont :

$$\begin{bmatrix}(v_{s3})\\ (v_{r3})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_s.I_3 & 0\\ 0 & R_r.I_3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}(i_{s3})\\ (i_{r3})\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}.\begin{bmatrix}(\psi_{s3})\\ (\psi_{r3})\end{bmatrix} \qquad [5.141]$$

Le passage aux phaseurs est immédiat à l'aide de la formule [5.41] :

$$\underline{v}_s = R_s.\underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} \text{ et } \underline{v}_r = R_s.\underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} \qquad [5.142]$$

d'où :

$$\underline{v}_s = R_s.\underline{i}_s + L_1.\frac{d\underline{i}_s}{dt} + \frac{3}{2}.M_0.e^{j.p.\theta}.\frac{d\underline{i}_r}{dt} + j.p.\frac{d\theta}{dt}.\frac{3}{2}.M_0.e^{j.p.\theta}.\underline{i}_r \qquad [5.143]$$

$$\underline{v}_r = R_s.\underline{i}_r + L_2\frac{d\underline{i}_r}{dt} + \frac{3}{2}.M_0.e^{-j.p.\theta}.\frac{d\underline{i}_s}{dt} - j.p.\frac{d\theta}{dt}.\frac{3}{2}.M_0.e^{-j.p.\theta}.\underline{i}_s \qquad [5.144]$$

Dans le chapitre 4, il est présenté l'intérêt de définir des référentiels tournants. Dans le formalisme des phaseurs complexes, le changement de repère s'écrit, d'abord pour les variables statoriques, puis pour les variables rotoriques :

$$\underline{x}_s = e^{j.\xi_s}.\underline{x}_s{}^{dq} \tag{5.145}$$

$$\underline{x}_r = e^{j.\xi_r}.\underline{x}_r{}^{dq} \tag{5.146}$$

L'indice supérieur $dq$ est là pour indiquer que le nouveau phaseur est défini dans un référentiel tournant (la notation est déduite des notations classiques pour les composantes de Park). Alors, les équations [5.142] deviennent :

$$e^{j.\xi_s}.\underline{v}_s{}^{dq} = R_s.e^{j.\xi_s}.\underline{i}_s{}^{dq} + \frac{d\left(e^{j.\xi_s}.\underline{\psi}_s{}^{dq}\right)}{dt} \tag{5.147}$$

$$e^{j.\xi_r}.\underline{v}_r{}^{dq} = R_r.e^{j.\xi_r}.\underline{i}_r{}^{dq} + \frac{d\left(e^{j.\xi_r}.\underline{\psi}_r{}^{dq}\right)}{dt} \tag{5.148}$$

Ces équations donnent :

$$\underline{v}_s{}^{dq} = R_s.\underline{i}_s{}^{dq} + \frac{d\underline{\psi}_s{}^{dq}}{dt} + j.\frac{d\xi_s}{dt}.\underline{\psi}_s{}^{dq} \tag{5.149}$$

$$\underline{v}_r{}^{dq} = R_r.\underline{i}_r{}^{dq} + \frac{d\underline{\psi}_r{}^{dq}}{dt} + j.\frac{d\xi_r}{dt}.\underline{\psi}_r{}^{dq} \tag{5.150}$$

On applique également le changement de repère aux équations au flux [5.139] :

$$e^{j.\xi_s}.\underline{\psi}_s{}^{dq} = L_1.e^{j.\xi_s}.\underline{i}_s{}^{dq} + \frac{3}{2}.M_0.e^{j.p.\theta}.e^{j.\xi_r}.\underline{i}_r{}^{dq} \tag{5.151}$$

$$e^{j.\xi_r}.\underline{\psi}_r{}^{dq} = \frac{3}{2}.M_0.e^{-j.p.\theta}.e^{j.\xi_s}.\underline{i}_s{}^{dq} + L_2.e^{j.\xi_r}.\underline{i}_r{}^{dq} \tag{5.152}$$

Et l'on observe que si l'on applique la « condition de simplification » :

$$\xi_s = p.\theta + \xi_r \tag{5.153}$$

Les équations aux flux se simplifient car leurs coefficients deviennent constant :

$$\underline{\psi}_s^{dq} = L_1.\underline{i}_s^{dq} + \frac{3}{2}.M_0.\underline{i}_r^{dq} \quad [5.154]$$

$$\underline{\psi}_r^{dq} = \frac{3}{2}.M_0.\underline{i}_s^{dq} + L_2.\underline{i}_r^{dq} \quad [5.155]$$

En pratique, la conception de lois de commande pour les machines électriques s'appuie sur les équations [5.149], [5.150], [5.154] et [5.155], et « l'art de la commande » s'appuie souvent sur un judicieux choix des repères définis par les angles $\xi_s$ et $\xi_r$.

## 5.13. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un outil très populaire pour modéliser les machines électriques à courant alternatif : les phaseurs. Ceux-ci sont le plus fréquemment définis dans une version complexe qui conserve les amplitudes des signaux alternatifs. Nous avons montré qu'il peut en exister une variante réelle qui lui est complètement équivalente. Dans le chapitre 4, nous avons montré également qu'il est possible de définir, en fait, des familles de transformées réelles ou complexes qui peuvent conserver les amplitudes des signaux ou l'expression de la puissance.

Nous avons également montré qu'il peut en exister deux approches : une première approche est physique, et elle montre, *in fine*, que les phaseurs temporels associés aux courants triphasés ou les phaseurs temporels associés aux flux contiennent les mêmes informations, et celles-ci renseignent sur l'état magnétique de la machine que l'on peut également décrire avec des phaseurs spatio-temporels associés aux champs magnétiques. Ces outils sont très utiles lorsque l'on se pose des questions plus fines sur le fonctionnement réel de la machine, sur les effets de la saturation par exemple ; ce problème est en dehors des ambitions de ce chapitre, mais l'outil présenté ici est bien adapté à ce type de problème.

La seconde approche est plus formelle, plus mathématique : elle a, en fait, les mêmes propriétés que la « transformée de Fortescue » présentée au chapitre 4. L'approche par la transformée de Fortescue est plus puissante et permet de mieux intégrer certaines questions (comme celles qui sont associées à la composante homopolaire, par exemple), mais l'approche par les phaseurs peut apparaître plus simple et plus directe, surtout dans un contexte où l'efficacité et la rapidité d'établissement des équations l'emportent sur les autres considérations.

## 5.14. Bibliographie


[ADK 57] ADKINS B., *The general Theory of electrical Machines*, Chapman and Hall, Londres, 1957.

[ADK 75] ADKINS B., HARTLEY R.G., *The general theory of alternating current machines*, Chapman and Hall, Londres, 1975.

[AMI 00] AMIN B., *Induction Motors, Analysis and Torque control*, Springer Verlag, Berlin, 2000.

[BOS 86] BOSE B.K., *Power electronics and AC Drives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.

[BOL 92] BOLDEA I., NASAR S.A., *Vector control of AC Drive*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[CAR 95] CARON J.-P., HAUTIER J.P., *Modélisation et commande de la machine asynchrone*, Technip, Paris, 1995.

[CHA 83] CHATELAIN J., *Machines électriques*, Traité d'Electricité vol. 10, Dunod, Paris, 1983.

[CON 51] CONCORDIA C., *Synchronous Machines*, Wiley and Son, New York, 1951.

[DEP 98] DEPENBROCK M., STAUDT V., « Hyper Space vectors: A new four-quantity Extension of Space-vector Theory », *ETEP*, vol. 8, n° 4, p. 241-248, juillet-août 1998.

[FOR 90] DE FORNEL B., « Alimentation des Machines asynchrones, traité de génie électriques », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D3620 et D 3621, 1990.

[GAU 95] GAUDE D., « La Conversion d'Energie Electromécanique », *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 89, p. 165-204, juin 1995.

[GRE 96] GRELLET G., CLERC G., *Actionneurs électriques, Principes, Modèles, Commandes*, Eyrolles, Paris, 1996.

[GRE 01] GRENIER D., LABRIQUE F., BUYSE H., MATAGNE E., *Electromécanique, Convertisseurs d'énergie et actionneurs*, Dunod, Paris, 2001.

[GUD] GUDEFIN E.J., Correspondance triphasé-diphasé. Transformations fondamentales dans la machine diphaséee, Cours polycopiés, ENSEM, INPL, Nancy.

[HEL 01] HELIODORE F., « Modélisation avancée des machines électriques tournantes pour le filtrage actif et l'aide au diagnostic », *Journées nationales d'automatique*, Autrans, 31 janvie-2 février 2001.

[JON 67] JONES C.V., *The unified theory of electrical machines*, Butterworth, Londres, 1967.

[KOV 59] KOVACS K.P., RACZ I., « Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen », Bd I-II, *Verlag der Ungarischen Akademien der Wissenschaften*, Budapest, 1959.

[KRO 35-38] KRON G., « The application of Tensors to analysis of rotating electrical machinery », part I-part XVIII, *General Electric Revew*, avril 1935-octobre 1938.

[KU 52] KU Y.H., « Rotatting-field theory and general analysis of synchronous and induction machines », *IEE, Monogr.*, vol. 99, part IV, n° 4, p. 410-428, 1952.

[LAZ 87] LAZAR J., *Park-Vector Theory of Line-Commutated Three-Phase Bridge Converters*, OMIKK Publisher, Budapest, 1987.

[LAZ 90] LAZAR J., *Converter Controlled Induction Motor Drives*, OMIKK Publisher, Budapest, 1990.

[LEO 90] LEONHARD W., *Control of electrical machines*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[LES 81] LESENNE J., NOTELET F., SEGUIER G., *Introduction à l'électrotechnique approfondie*, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1981.

[LOU 96] LOUIS J.-P., BERGMANN C., « Commande numérique des ensembles convertisseurs-machines, Systèmes triphasés : régimes permanents », *Techniques de l'Ingénieur*, fascicules D 3642, 1996.

[LYO 54] LYON W.V., *Transient analysis of alternating-current machinery*, Wiley and Son, New York, 1954.

[NOV 00] NOVOTNY D.W., LIPO T.A., *Vector control and dynamics of AC Drives*, Oxford Science Publications, Oxford, 2000

[PAR 29] PARK R.H., « Two-reaction theory of synchronous machines », *AIEE Trans.* 48, p. 716-730, 1929.

[PAR 33] PARK R.H., « Two-reaction theory of synchronous machines », *AIEE Trans.* 52, p. 352-355, 1933.

[SER 93a] SERRANO-IRIBARNEGARAY I., « The modern Space-Phasor Theory. Part I: Its Coherent Formulation and its Advantages for Transient Analysis of Converter-fed AC machines », *ETEP*, vol. 3, n° 2, p. 171-179, mars-avril 1993.

[SER 93b] SERRANO-IRIBARNEGARAY I., « The modern Space-Phasor Theory. Part II: Comparison with the generalised Machine Theory and the Space-vector Theory », *ETEP*, vol. 3, n° 3, p. 213-219, mai-juin 1993.

[SER 95] SERRANO-IRIBARNEGARAY I., « Critical Review of the Scientific Background Underlying the Generalised Machine Theory and Correlation Theorems in the Space-Phasor Theory », *ETEP*, vol. 5, n° 4, p. 247-255, juillet-août 1995.

[SEM 00] SEMAIL E., Outils et méthodologie d'étude des systèmes électriques polyphasés, Généralisation de la méthode des vecteurs d'espace, Thèse de doctorat de l'Université des sciences et technologie de Lille, 30 juin 2000.

[STA 99] STAUDT V., « AC Machine Dynamics described by Space-Vectors Using State-Space Notation », *ETEP*, vol. 9, n° 1, p. 17-25, janvier-février 1999.

[VAS 90] VAS P., Vector control of AC Machines, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[VAS 92] VAS P., *Electrical Machines and Drives*, Oxford Science publications, Oxford, 1992.

[WHI 59] WHITE D.C., WOODSON H.H., *Electromechanical Energy Conversion*, Wiley and Son, New York, 1959.

# Index

**D, E**



**F, G**

**G, H**



**I**



**K, L**



**M**

**N, O**



**P**



**R**

## Série GÉNIE ÉLECTRIQUE

***sous la direction de René Le Dœuf et Jean-Claude Sabonnadière***

---

Crappe Michel, Commande et régulation des réseaux électriques
ISBN 2-7462-0606-4

Crappe Michel, Stabilité et sauvegarde des réseaux électriques
ISBN 2-7462-0607-2

Féchant Louis et Tixador Pascal, Matériaux conducteurs et de contact électrique — ISBN 2-7462-0489-4

Husson René, Méthodes de commande des machines électriques
ISBN 2-7462-0576-9

Loron Luc, Commande des systèmes électriques : perspectives technologiques — ISBN 2-7462-0735-4

Louis Jean-Paul, Actionneurs électriques : modèles des commandes
ISBN 2-7462-0917-9

Louis Jean-Paul, Commandes des machines électriques : concepts généraux de modélisation — ISBN 2-7462-0916-0

Meunier Gérard, Electromagnétisme et problèmes couplés
ISBN 2-7462-0548-3

Meunier Gérard, Champs et équations en électromagnétisme
ISBN 2-7462-0588-2

Meunier Gérard, Modèles et formulations en électromagnétisme
ISBN 2-7462-0547-5

Perret Robert, Interrupteurs électroniques de puissance
ISBN 2-7462-0671-4

Tixador Pascal, Matériaux supraconducteurs — ISBN 2-7462-0490-8

## Série MICROSYSTÈMES

***sous la direction de Jean-Pierre Goure***
***et Jean-Claude Sabonnadière***

---

Colin Stéphane, Microfluidique — ISBN 2-7462-0815-6

Cugat Orphée, Micro-actionneurs électroactifs
ISBN 2-7462-0364-2

Cugat Orphée, Micro-actionneurs électromagnétiques MAGMAS
ISBN 2-7462-0449-5

de Labachelerie Michel, Techniques de fabrication des microsystèmes 1
ISBN 2-7462-0817-2

de Labachelerie Michel, Techniques de fabrication des microsystèmes 2
ISBN 2-7462-0818-0

Fabry Pierre et Fouletier Jacques, Microcapteurs chimiques et biologiques : applications en milieu liquide — ISBN 2-7462-0743-5

Viktorovitch Pierre, Microsystèmes opto-électromécaniques MOEMS
ISBN 2-7462-0585-8

## Série OPTOÉLECTRONIQUE

***sous la direction de Jean-Pierre Goure***

---

Decoster Didier et Harari Joseph, Détecteurs optoélectroniques
ISBN 2-7462-0562-9

Froehly Claude, Sources lumineuses pour l'optoélectronique
ISBN 2-7462-0692-7

Meunier Jean-Pierre, Physique et technologie des fibres optiques
ISBN 2-7462-0720-6

Meunier Jean-Pierre, Télécoms optiques : composants à fibres, systèmes de transmission — ISBN 2-7462-0721-4

Meyzonnette Jean-Louis, Optique géométrique et propagation
ISBN 2-7462-0728-1

Meyzonnette Jean-Louis, Optique physique — ISBN 2-7462-0729-X

Roosen Gérald, Filière silicium et matériaux fonctionnels pour l'optoélectronique — ISBN 2-7462-0642-0

Roosen Gérald, Matériaux semi-conducteurs III-V, II-VI et nitrures pour l'optoélectronique — ISBN 2-7462-0641-2

Valette Serge, Applications de l'optoélectronique
ISBN 2-7462-0488-6

---

Sommaire détaillé de chaque ouvrage du traité EGEM sur les sites :

www.lavoisier.fr

www.hermes-science.com

CET OUVRAGE A ÉTÉ COMPOSÉ PAR HERMÈS SCIENCE PUBLICATIONS ET ACHEVÉ D'IMPRIMER PAR L'IMPRIMERIE FLOCH À MAYENNE EN JUILLET 2004.

DÉPÔT LÉGAL : JUILLET 2004.
N° D'IMPRIMEUR : 60461.
*Imprimé en France*

**Traité EGEM**

**Electronique – Génie Electrique – Microsystèmes**

## GÉNIE ÉLECTRIQUE

Le traité Electronique, Génie Electrique, Microsystèmes répond au besoin de disposer d'un ensemble de connaissances, méthodes et outils nécessaires à la maîtrise de la conception, de la fabrication et de l'utilisation des composants, circuits et systèmes utilisant l'électricité, l'optique et l'électronique comme support.

Conçu et organisé dans un souci de relier étroitement les fondements physiques et les méthodes théoriques au caractère industriel des disciplines traitées, ce traité constitue un état de l'art structuré autour des quatre grands domaines suivants :

Electronique et micro-électronique

Optoélectronique

Génie électrique

Microsystèmes

Chaque ouvrage développe aussi bien les aspects fondamentaux qu'expérimentaux du domaine qu'il étudie. Une classification des différents chapitres contenus dans chacun, une bibliographie et un index détaillé orientent le lecteur vers ses points d'intérêt immédiats : celui-ci dispose ainsi d'un guide pour ses réflexions ou pour ses choix.

Les savoirs, théories et méthodes rassemblés dans chaque ouvrage ont été choisis pour leur pertinence dans l'avancée des connaissances ou pour la qualité des résultats obtenus.

ISBN 2-7462-0916-0

9 782746 209169

Hermes Science publications

www.hermes-science.com